Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 27 — Mechanik auf dem Küchentisch
In einen Küchentisch (Oberfläche: $x-y$-Ebene) werde ein Loch im Punkt $x=y=0$ gebohrt. Danach werden zwei Massen M und m durch ein masseloses Seil (Baumarkt) der Länge l verbunden. Die eine Masse M hänge an dem durch das Loch verlaufende Seil unter dem Tisch. Die andere Masse m rotiere reibungsfrei auf der Tischplatte.

Formulieren Sie die Zwangsbedingungen, stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, und geben Sie die Bewegungsgleichungen an!

Unter welchen Bedingungen bleibt der Abstand s der Masse M vom Loch und somit auch der Abstand $r=\sqrt{x^2+y^2}$ der Masse m vom Loch zeitlich konstant?

Was passiert, wenn die Masse m gar nicht rotiert, d.h. $\varphi=\arctan(y/x)=$ const. ist?

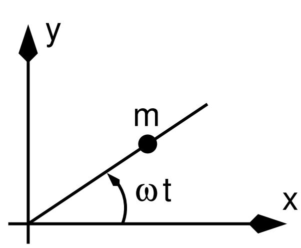
Aufgabe 28 — Perle auf Draht, Lagrange-Gleichungen zweiter Art
Eine Perle (Masse m) gleitet reibungsfrei auf einem Draht, dessen Form durch $z=h(x)$ gegeben ist, in der x-z-Ebene. Auf die Perle wirkt die Schwerkraft $\boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{e}_z$.

Stellen Sie diesmal die Bewegungsgleichungen als Lagrange-Gleichungen zweiter Art auf!

Vergleichen Sie mit den Lagrange-Bewegungsgleichungen erster Art!

Gilt Energieerhaltung?

Aufgabe 29 — Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen
Betrachten Sie das Problem einer auf einer rotierenden Stange gleitenden Masse m:



Wählen Sie den Abstand der Masse zum Ursprung ρ als generalisierte Koordinate, geben Sie die Lagrange-Funktion und die Lagrange-Gleichung (2. Art) an!

Wiederholen Sie die Rechnung, aber wählen Sie jetzt x als generalisierte Koordinate!

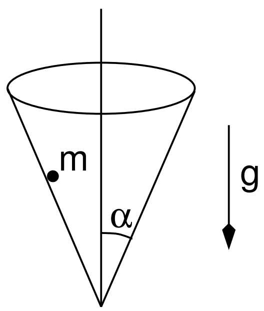
Zeigen Sie, dass die Lagrange-Gleichung in x, $\dot{x}$ der Lagrange-Gleichung in ρ, $\dot{\rho}$ äquivalent ist!

Zeigen Sie, dass man die Lagrange-Funktion $L(\rho, \dot{\rho}, t)$ aus der Lagrange-Funktion $L'(x, \dot{x}, t)$ durch Einsetzen erhält:

$$L(\rho, \dot{\rho}, t) = L'(x(\rho, t), \dot{x}(\rho, \dot{\rho}, t), t) \qquad !$$

(Rechnungen sind etwas länglich aber instruktiv.)

Aufgabe 30 — Massenpunkt auf Kreiskegel
Eine Punktmasse m gleite reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels mit Öffnungswinkel α unter dem Einfluss des Schwerefelds.



a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das System?
Welcher Art sind die Zwangsbedingungen?
In welche Richtung zeigen die Zwangskräfte?
Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten!

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion an!
Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen (zweiter Art) auf!

c) Welche generalisierte Koordinaten sind zyklisch?
Ist L explizit zeitabhängig?
Geben Sie die zugehörigen Erhaltungssätze an!