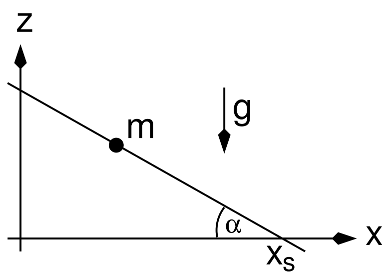
Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 23 — Beschleunigte schiefe Ebene
Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in x-Richtung beschleunigt wird: $x_S(t) = at^2/2$. Die Neigung α der schiefen Ebene bleibe dabei konstant.



Stellen Sie die Zwangsbedingung und die Lagrange-Gleichungen erster Art auf!

Lösen Sie die Bewegungsgleichungen!

Legen Sie die Integrationskonstanten mithilfe der Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$!

Bestimmen Sie die Zwangskraft!

Aufgabe 24 — Perle auf Draht
Eine Perle (Masse m) gleitet reibungsfrei auf einem Draht, dessen Form durch $z = h(x)$ gegeben ist, in der x-z-Ebene. Auf die Perle wirkt die Schwerkraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$.

Stellen Sie die Zwangsbedingung auf!
Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art auf!
Differenzieren Sie die Zwangsbedingung zweifach bzgl. t!
Setzen Sie die Bewegungsgleichungen ein!
Lösen Sie nach λ auf!
Eliminieren Sie λ aus den Bewegungsgleichungen!

Wie sehen die Bewegungsgleichungen für den Fall aus, dass sich die Form des Drahts zeitlich ändert?

Aufgabe 25 — Zwei Massenpunkte auf konzentrischen Kreisen
Zwei Massenpunkte (Massen m_1, m_2) können sich reibungsfrei auf zwei in der x-y-Ebene liegenden konzentrischen Kreisen (Radien r und R mit $R > r$) bewegen. Die beiden Massenpunkte sind durch eine masselose Stange der Länge L verbunden (es gelte $R - r < L < R + r$). Auf die Massen wirkt die Erdbeschleunigung $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$.

Diskutieren Sie zunächst die Fragen:

Welche Kräfte und Zwangskräfte wirken auf die beiden Massenpunkte?
In welche Richtungen zeigen die verschiedenen Zwangskräfte?

Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art auf!

Unter welchen Umständen befindet sich das System im Gleichgewicht? Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand, indem Sie nach Lösungen suchen, bei denen sich die Positionen beider Teilchen zeitlich nicht ändern! (Hinweis: Setzen Sie dazu $\ddot{x}_1 = 0$ etc.)

Aufgabe 26 — Geschwindigkeitsabhängige Kraft
Es sei ein orts-, geschwindigkeits- und zeitabhängiges verallgemeinertes Potenzial

$$U(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = V(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{r}, t)\, \dot{\boldsymbol{r}}$$

gegeben, dass über

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$$

eine Kraft definiert. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{W})\ !$$