

Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 13 — Zweiteilchenstoß

In einem Inertialsystem IS werde ein Stoß zweier Teilchen beobachtet, bei dem es zu einem Austausch von Masse kommt: Teilchen A (Masse m_A , Geschwindigkeit \mathbf{u}_A) trifft auf Teilchen B (Masse m_B , Geschwindigkeit \mathbf{u}_B). Nach dem Stoß werden Teilchen C (Masse m_C , Geschwindigkeit \mathbf{u}_C) und Teilchen D (Masse m_D , Geschwindigkeit \mathbf{u}_D) beobachtet.

a) (Rechnen Sie nichtrelativistisch!). Nehmen Sie an, dass die Gesamtmasse, die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls beim Stoß erhalten sind. Zeigen Sie, dass dann auch Gesamtmasse, die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls erhalten sind, wenn der Stoß in einem Inertialsystem IS' beschrieben wird, das sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zu IS bewegt!

b) (Rechnen Sie relativistisch!). Nehmen Sie an, dass die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls beim Stoß erhalten sind. Zeigen Sie, dass dann auch Gesamtenergie und der Gesamtimpuls erhalten sind, wenn der Stoß in einem Inertialsystem IS' beschrieben wird, das sich mit Geschwindigkeit \mathbf{v} relativ zu IS bewegt! Vereinfachend kann angenommen werden, dass sämtliche Bewegungen parallel zur x -Achse verlaufen.

Aufgabe 14 — Tensoren

$T^{\mu\nu}$ sei ein Tensor (kontravarianter Tensor 2. Stufe). Definiere mithilfe des metrischen Tensors g den sogenannten kovarianten Tensor 2. Stufe:

$$T_{\mu\nu} \equiv \sum_{\rho\sigma} g_{\mu\rho} T^{\rho\sigma} g_{\sigma\nu} .$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\mu\nu} T^{\mu\nu} T_{\nu\mu}$$

ein Lorentz-Skalar ist!

Aufgabe 15 — Invarianten des elektromagnetischen Felds

a) $F^{\mu\nu}$ sei der (kontravariante) elektromagnetische Feldstärketensor. Berechnen Sie die Komponenten von $F_{\mu\nu}$!

b) Berechnen Sie:

$$\sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} !$$

c) Berechnen Sie mithilfe des kontravarianten Feldstärketensors und des kovarianten dualen Feldstärketensors die Lorentz-Invariante:

$$\sum_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} !$$

Aufgabe 16 — Kontinuitätsgleichung

Betrachten Sie die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Vierer-Schreibweise:

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \mu_0 j^{\nu} ,$$

und leiten Sie die Kontinuitätsgleichung

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

ab!