Übungen zur Klassischen Feldtheorie

Aufgabe 1 — Kraftwirkung eines stromführenden Drahtes auf ein bewegtes Punktteilchen
Betrachten Sie einen langen, dünnen, geraden Draht entlang der x-Achse, in dem sich (sehr viele und gleichverteilte) positive Ladungen mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ bewegen. Man kann annehmen, dass der Draht homogen mit der Linienladungsdichte $\lambda = \Delta Q/\Delta L$ belegt ist.

a) Berechnen Sie das elektrische Feld (Richtung und Stärke) im Abstand r vom Draht!

b) Berechnen Sie das magnetische Feld (Richtung und Stärke) im Abstand r vom Draht!

c) Welche Kraft (Richtung und Stärke) wirkt auf ein Punktteilchen mit Ladung q, das sich im Abstand r vom Draht mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ bewegt?

d) Betrachten Sie jetzt den Draht und das Punktteilchen in einem mit den Ladungsträgern im Draht (und mit dem Punktteilchen) mitbewegten Bezugssystem, und wiederholen Sie die Rechnungen! Welche Kraft wirkt jetzt auf das Teilchen? Ist das Resultat mit dem Galileischen Relativitätsprinzip vereinbar?

Aufgabe 2 — Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten
Betrachten Sie Kugelkoordinaten, d.h.

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$!
b) Zeigen Sie, dass

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \;!$$

c) Berechnen Sie die kinetische Energie $T = \dfrac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$ in Kugelkoordinaten!
d) Berechnen Sie $\ddot{\boldsymbol{r}}$ in Kugelkoordinaten (d.h. als Linearkombination von $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$)!
e) Wie vereinfacht sich das Resultat für $r =$ const. und $\vartheta = \pi/2$?

Aufgabe 3 — Bewegung in einem Zentralkraftfeld
Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralkraftfeld mit Potenzial $V(r)$.

a) Warum kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Bewegung in der x-y-Ebene stattfindet?
b) Warum gilt Energieerhaltung?
c) Formulieren Sie den Erhaltungssatz in Kugelkoordinaten und zeigen Sie so, dass

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E \;,$$

wobei $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \dfrac{\boldsymbol{L}^2}{2mr^2}$ das "effektive Potenzial" ist!
d) Zeigen Sie jetzt, dass

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

gilt!
e) Zeigen Sie, dass

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{L}{mr'^2} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

gilt!
f) Wie erhält man jetzt prinzipiell die Bahnkurve des Teilchens?

Aufgabe 4 — Orthogonale Matrizen
Eine 3×3-Matrix $\underline{D}$ ist orthogonal, wenn $\underline{D}\,\underline{D}^T = \underline{D}^T \underline{D} = \mathbf{1}$.

a) Zeigen Sie, dass Längen und Winkel bei einer orthogonalen Koordinatentransformation unverändert bleiben!
b) Zeigen Sie, dass ± 1 die einzigen möglichen Eigenwerte von $\underline{D}$ sind!
c) Wie viele der 9 Elemente einer orthogonalen Matrix können unabhängig voneinander gewählt werden? Was gilt für orthogonale $n \times n$-Matrizen?