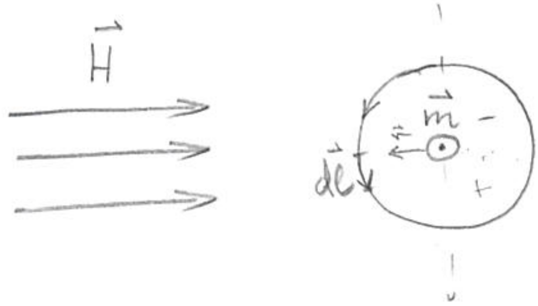
CIS - Computational Physics - 27.1.12

Magnetisierungsdynamik

1. ein paar klassische Überlegungen vorweg ...

betrachte magnetisches Moment $\vec{m}$ in einem konstanten Magnetfeld $\vec{H}$



$$\vec{m} = \frac{1}{2} J \vec{A} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} \, dV$$

Lorentzkraft auf das Leiterelement $d\vec{l}$

$$d\vec{F}_L = \vec{j} \times \vec{H} \, dV = I \, d\vec{l} \times \vec{H}$$

$\vec{H}$ ersetzen durch $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}$

Drehmoment auf das Leiterelement

$$\begin{aligned} d\vec{M} &= \vec{r} \times d\vec{F}_L \\ &= \vec{r} \times (I \, d\vec{l} \times \vec{H}) \\ &= I (\vec{r} \times d\vec{l}) \times \vec{H} + I (\vec{H} \times \vec{r}) \times d\vec{l} \\ &= 2 d\vec{m} \times \vec{H} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M} = 2 \vec{m} \times \vec{H} + \underbrace{I \int (\vec{H} \times \vec{r}) \, d\vec{l}}_{-\vec{m} \times \vec{H}} = \vec{m} \times \vec{H}$$

Drehimpulssatz $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$

Zusammenhang zwischen $\vec{L}$ & $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} \, dV$$

$$= \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \rho_e \vec{v} \, dV \qquad \rho_e = \text{Ladungsdichte}$$

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{p} \, dV$$

$$= \int \vec{r} \times \rho_m \vec{v} \, dV \qquad \rho_m = \text{Massendichte}$$

wenn wir annehmen können, dass das Verhältnis zwischen Ladungsdichte & Massendichte konstant ist (dazu müssen die einzelnen Dichten nicht konstant sein!):

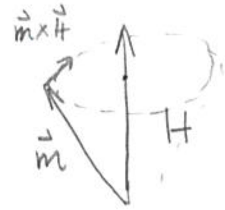
$$\frac{\rho_e}{\rho_m} = \text{const} = \frac{Q}{M}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int \frac{Q}{M} \vec{r} \times \rho_m \vec{v} \, dV = \frac{Q}{2M} \vec{L}$$

Damit können wir die Bewegungsgln für das magn. Moment im Magnetfeld aufstellen: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{2M}{Q}}_{\gamma^{-1}} \frac{d\vec{m}}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{Q}{2M}\vec{M} = \underbrace{\frac{Q}{2M}}_{\text{gyromagnetisches Verhältnis}}\vec{m}\times\vec{H}}$$

Diese Gleichung beschreibt die Präzession von $\vec{m}$ um $\vec{H}$



beachte: der Betrag des magn. Moments ändert sich nicht:

$$\frac{d}{dt}(\vec{m})^2 = 2\,\vec{m}\cdot\frac{d\vec{m}}{dt}$$

$$= 2\vec{m}\cdot\left(\frac{Q}{2M}\vec{m}\times\vec{H}\right)$$

$$= 0$$

Komponente der Magnetisierung $\parallel \vec{H}$

$$\Rightarrow \cancel{\vec{m}_{\parallel}\times\vec{H} = 0} \quad \frac{dm_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{m}\cdot\vec{e}_H = \frac{d\vec{m}}{dt}\cdot\vec{e}_H$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{m}_{\parallel}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{m}_{\parallel} = \text{const}$$

Komponenten $\perp \vec{H}$: $\vec{m}_{\perp}^{(1)} = \vec{m}\times\vec{e}_H$

$$\vec{m}_{\perp}^{(2)} = (\vec{m}\times\vec{e}_H)\times\vec{e}_H$$

$$\frac{d\vec{m}_{\perp}^{(1)}}{dt} = \frac{d\vec{m}}{dt}\times\vec{e}_H$$

$$= \frac{Q}{2M}(\vec{m}\times\vec{H})\times\vec{e}_H = \frac{QH}{2M}m_{\perp}^{(2)}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_\perp^{(2)} = \left(\frac{d\vec{m}}{dt}\times\vec{e}_H\right)\times\vec{e}_H$$

$$= \frac{QH}{2M}\, m_\perp^{(2)} \times \vec{e}_H$$

$$= \frac{QH}{2M}\left[(\vec{m}\times\vec{e}_H)\times\vec{e}_H\right]\times\vec{e}_H$$

$$= \frac{QH}{2M}\,\vec{e}_H\,[\underbrace{(\vec{m}\times\vec{e}_H)\cdot\vec{e}_H}_{=0}] - (\vec{m}\times\vec{e}_H)[\vec{e}_H\cdot\vec{e}_H]$$

$$= -\frac{QH}{2M}\,\vec{m}_\perp^{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\vec{m}_\perp^{(1)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{QH}{2M}\, m_\perp^{(2)}\right)$$

$$= -\left[\frac{QH}{2M}\right]^2 \vec{m}_\perp^{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m}_\perp^{(1)}(t) = \left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]\vec{m}(t=0)\times\vec{e}_H$$

$$m_\perp^{(2)}(t) = \frac{2M}{QH}\,\frac{QH}{2M}\left[-A\sin\omega t + B\cos\omega t\right]\cdot (\vec{m}(t=0)\times\vec{e}_H)\times\vec{e}_H$$

$$\Rightarrow \quad A = m_\perp^{(1)}, \quad \omega\vec{B} = m_\perp^{(2)} \quad \omega = \frac{QH}{2M} = \gamma H$$

Präzession mit Dämpfung

Die Energie des magn. Moments im Magnetfeld beträgt

$$\vec{E} = -\vec{m}\cdot\mu_0\vec{H}$$

Wir erwarten daher, dass eine Dämpfung

der Bewegung dazu führt, dass sich das magn. Moment parallel zum äußeren Feld ausrichtet, d.h. spiralförmig auf $\vec{H}$ zu läuft.

In der Bewegungsgln kann die Dämpfung durch einen Term der Form $-\lambda\, \vec{m} \times \dot{\vec{m}}$ ausgedrückt werden

$\boxed{\text{Dimension von } \lambda?}$

Gilbert Dämpfung

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{m}} = \frac{Q}{2M}\mu_0 \vec{m} \times \vec{H} - \lambda\, \vec{m} \times \dot{\vec{m}}$$

Der Betrag des magn. Moments bleibt auch bei dieser Form der Dämpfung konstant, da immer noch gilt, dass $\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}} = 0$

Die Gln formen wir ein wenig um, damit wir eine DGL in expliziter ~~Form~~ erhalten. Vektor-Multiplikation mit $\vec{m}$ ergibt:

$$\vec{m} \times \dot{\vec{m}} = \gamma\mu_0 \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H})' - \lambda\, \vec{m} \times (\vec{m} \times \dot{\vec{m}})$$

$$= \gamma\mu_0\, \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}) - \lambda \left[\vec{m} \underbrace{(\vec{m} \cdot \dot{\vec{m}})}_{=0} - \dot{\vec{m}} (\vec{m} \cdot \vec{m}) \right]$$

$$= \gamma\mu_0\, \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}) - \lambda m^2\, \dot{\vec{m}}$$

$\Rightarrow$ (Einsetzen in Bewegungsglu:)

$$\dot{\vec{m}} = \gamma\mu_0\, \vec{m} \times \vec{H} - \lambda \left[\gamma\mu_0\, \vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}) - m^2 \lambda\, \dot{\vec{m}} \right]$$

$\Rightarrow$ (Auflösen nach $\dot{\vec{m}}$:)

$$\dot{\vec{m}}\, \underbrace{(1 + m^2\lambda)} = \gamma\mu_0\, \vec{m} \times \left[\vec{H} - \lambda (\vec{m} \times \vec{H}) \right]$$

Betrachten wir auch hier die Komponenten

$$m^{\parallel} = \vec{m} \cdot \vec{e}_H, \quad \vec{m}_\perp^{(1)} = \vec{m} \times \vec{e}_H, \quad m_\perp^{(2)} = m^{(1)} \times \vec{e}_H$$

getrennt.

Die Bewegungsglu für die Komponenten ergeben sich zu

$$\frac{dm^{\parallel}}{dt} = \dot{\vec{m}} \cdot \vec{e}_H = -\gamma\mu_0\, \lambda' \left[\vec{m} \times (\vec{m} \times \vec{H}) \right] \cdot \vec{e}_H$$

$$= -\gamma\mu_0\, \lambda' \left[\vec{m} \cdot \vec{e}_H (\vec{m} \cdot \vec{H}) - \vec{H} \cdot \vec{e}_H (\vec{m} \cdot \vec{m}) \right]$$

$$= +\gamma\mu_0\, \lambda' H \left(m^2 - m_{\parallel}^2 \right) = \gamma\mu_0\, \lambda' H\, m_\perp^2$$

wobei $\lambda' = \frac{\lambda}{1+m^2\lambda^2}$

$$\frac{d}{dt}\vec{m}_\perp^{(1)} = \dot{\vec{m}} \times \vec{e}_H$$

$$= \frac{\gamma\mu_0}{1+m^2\lambda^2}\left[(\vec{m}\times\vec{H})\times\vec{e}_H - \lambda\left(\vec{m}\times m_\perp^{(1)}\right)\times\vec{H}\right]$$

$$= \frac{\gamma\mu_0}{1+m^2\lambda^2} H\left[\vec{m}_\perp^{(2)} - \lambda^{m_\parallel}\vec{m}_\perp^{(1)}\right]$$

$$= \gamma'\mu_0 H\, m_\perp^{(2)} - \gamma\mu_0\, \lambda' H m^{\parallel}\, \vec{m}_\perp^{(1)}$$

$$\frac{d}{dt} m_\perp^{(2)} = \frac{d}{dt} m_\perp^{(1)} \times \vec{e}_H$$

$$= \gamma'\mu_0 H \underbrace{m_\perp^{(2)} \times \vec{e}_H}_{-m_\perp^{(1)}} - \gamma\mu_0\, \lambda' H m^{\parallel}\, \vec{m}_\perp^{(2)}$$

$$= -\gamma'\mu_0 H\, m_\perp^{(1)} - \gamma\mu_0\, \lambda' H m^{\parallel}\, \vec{m}_\perp^{(2)}$$

$$= -\gamma'\mu_0 H\, m_\perp^{(1)} - \gamma'\mu_0 H m^{\parallel}\lambda\, m_\perp^{(2)}$$

Ähnlich wie bei der ungedämpften Bewegungen gibt

$$\omega = \gamma'\mu_0 H$$

die Präzessionsfrequenz der Bewegung an. Bezeichnen wir darüber hinaus die Größe

$$\gamma' \mu_0 H m \lambda = \omega m'' \lambda = \frac{1}{\tau}$$

so können wir die Diff-Gleichungen in kompakter Form schreiben:

$$\frac{dm''}{dt} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{m} m_\perp^2$$

$$\frac{d\vec{m}_\perp^{(1)}}{dt} = \omega m_\perp^{(2)} - \frac{1}{\tau}\frac{m''}{m} m_\perp^{(1)} \qquad (1)$$

$$\frac{dm_\perp^{(2)}}{dt} = -\omega m_\perp^{(1)} - \frac{1}{\tau}\frac{m''}{m} m_\perp^{(2)}$$

Leitet man die DGL für die senkrechten Komponenten der Magnetisierung ein weiteres Mal nach der Zeit ab, so kann man die Gleichungen entkoppeln:

$$\frac{d^2 m_\perp^{(1)}}{dt^2} = \omega \dot{m}_\perp^{(2)} - \frac{1}{\tau}\dot{m}_\perp^{(1)}$$

Dazu nehmen wir außerdem an, dass $\frac{m''}{m} \simeq 1$

$$= \omega\left(-\omega m_\perp^{(1)} - \frac{1}{\tau} m_\perp^{(2)}\right) - \frac{1}{\tau}\dot{m}_\perp^{(1)}$$

In dieser Gln ersetzt man noch $m_\perp^{(2)}$ aus Gln (1): $\omega m_\perp^{(2)} = \dot{m}_\perp^{(1)} + \frac{1}{\tau} m_\perp^{(1)}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 m_\perp^{(1)}}{dt^2} = -\omega^2 m_\perp^{(1)} - \frac{2}{\tau}\dot{m}_\perp^{(1)} - \frac{1}{\tau^2} m_\perp^{(1)}$$

$$= -\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right) m_\perp^{(1)} - \frac{2}{\tau}\dot{m}_\perp^{(1)}$$

Die Lösung dieser Differentialgln ist die exponentiell abklingende Funktion

$$m_\perp^{(1)} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(m_\perp^{(1)}(0) \cos \omega' t + m_\perp^{(2)}(0) \sin \omega' t \right)$$

mit $\omega' = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}$,

wobei sich die Anfangswerte aus den Werten von $m_\perp^{(1)}(0)$ & $m_\perp^{(2)}(0)$ zur Zeit $t=0$ ergeben.

Damit erfüllt

$$m_\perp^{(2)} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(m_\perp^{(2)}(0) \cos \omega' t - m_\perp^{(1)} \sin \omega' t \right).$$

Für $m_\parallel$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} m_\parallel^2 &= m^2 - \left(\left(m_\perp^{(1)}\right)^2 + \left(m_\perp^{(2)}\right)^2 \right) \\ &= m^2 - \underbrace{\left(\left(m_\perp^{(1)}(0)\right)^2 + \left(m_\perp^{(1)}(0)\right)^2 \right)}_{m^2 - m_\parallel^2(0)} e^{-\frac{2t}{\tau}}, \\ &= m^2 - e^{-2t/\tau} \left(m^2 - m_\parallel^2(0)\right) \end{aligned}$$

Wie erwartet verschwindet die Komponente senkrecht zum Magnetfeld im Laufe der Zeit und die Magnetisierung richtet sich parallel zum Feld aus.