Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 32 — Retardierte Selbstenergie
Sei $\boldsymbol{A}$ eine komplexe Matrix. Definiere $\boldsymbol{A}_1 = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\dagger)/2$ und $\boldsymbol{A}_2 = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\dagger)/2i$, dann ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + i\boldsymbol{A}_2$ mit $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ hermitesch. Sei $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}_1 + i\boldsymbol{B}_2$ mit $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ hermitesch. Zeigen Sie: Aus $\boldsymbol{A}_2$ negativ definit folgt $\boldsymbol{B}_2$ negativ definit!

Zeigen Sie damit, dass der Imaginärteil der retardierten Selbstenergie negativ definit ist!

Aufgabe 33 — Matsubara-Frequenzen
Zeigen Sie, dass die Fermi-Funktion / Bose-Funktion

$$\frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon}$$

für komplexe Frequenzen eine analytische Funktion ist bis auf Polstellen erster Ordnung an den fermionischen / bosonischen Matsubara-Frequenzen! Bestimmen Sie die Residuen!

Aufgabe 34 — Matsubara-Summen
Es sei $F(\omega)$ eine analytische Funktion bis auf Pole erster Ordnung auf der reellen ω-Achse, die für große $|\omega|$ schneller als $1/|\omega|$ gegen Null geht. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\beta}\sum_n F(i\omega_n) = \frac{\varepsilon}{2\pi i}\oint_C d\omega \frac{1}{e^{\beta\omega} - \varepsilon} F(\omega) \ ,$$

wobei C ein Weg ist, der jede Matsubara-Frequenz gegen den Uhrzeigersinn genau einmal umläuft.

Aufgabe 35 — Ein-Teilchen-Korrelationsfunktion
Begründen Sie, dass die Matsubara-Summe

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(i\omega_n)$$

für endliches (aber infinitesimales) 0^+ wohldefniert ist, und berechnen Sie die Summe durch Integration in der komplexen Ebene (s.o.) mit anschließender geeigneter Deformation des Integrationswegs, um zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\beta}\sum_n e^{i\omega_n 0^+} G_{\alpha\beta}(i\omega_n) = -\varepsilon\langle c_\beta^\dagger c_\alpha\rangle \qquad !$$