Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 30 — Innere Energie
Zeigen Sie, dass die innere Energie $U = \langle H \rangle$ eines Systems von identischen Fermionen,

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\delta c_\gamma \ ,$$

mithilfe der Ein-Teilchen-Spektraldichte $A_{\alpha\beta}(\omega) = (-1/\pi)\mathrm{Im}G_{\alpha\beta}(\omega + i0^+)$ durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \int d\omega\ f(\omega)[(\omega + \mu)\delta_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}] A_{\beta\alpha}(\omega)$$

ausgedrückt werden kann! Nutzen Sie dazu die Bewegungsgleichung für $G_{\alpha\beta}(\omega)$, das Spektraltheorem und die Symmetrie $U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_{\beta\alpha\delta\gamma}$ aus! $f(\omega) = 1/(e^{\omega/T} + 1)$ ist die Fermi-Funktion. Was ändert sich im Falle von Bosonen?

Aufgabe 31 — Spektraltheorem
Betrachten Sie ein freies, spinloses Teilchen in einer Dimension:

$$H = \frac{p^2}{2m} \ , \qquad [x, p]_- = i \ .$$

Der (gemischte) Zustand des Systems sei durch $\rho = \exp(-\beta H)/Z$ mit $Z = \mathrm{Sp}\exp(-\beta H)$ gegeben.

a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} T$$

und begründen Sie das Ergebnis!

b) $\langle H \rangle$ soll jetzt aus der Kommutator-Green-Funktion $G^{(+)}(\omega) = \langle\langle p; p \rangle\rangle^{(+)}$ berechnet werden. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $G^{(+)}(\omega)$! (Das Ergebnis ist trivial).

c) Versuchen Sie, den Erwartungswert $\langle H \rangle = \langle p \cdot p \rangle / 2m$ aus dem Spektraltheorem zu bestimmen. Beachten Sie dabei die Konstante D (s. Vorlesung)!

d) Begründen Sie die Beziehung

$$\lim_{\omega \to 0} \omega G^{(-)}(\omega) = 2D \ ,$$

und berechnen Sie so die Konstante D aus der Antikommutator-Green-Funktion $G^{(-)}(\omega) = \langle\langle p; p \rangle\rangle^{(-)}$! Gelingt die Bestimmung von $\langle H \rangle$?

e) Es sei nun ein infinitesimales, symmetriebrechendes Feld durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\eta^2 x^2 \qquad \text{mit } \eta \to 0$$

eingeführt. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Kommutator-Green-Funktion $\langle\langle p; p\rangle\rangle^{(+)}$ auf und lösen Sie diese für $\eta \neq 0$! (Dazu ist auch $\langle\langle x; p\rangle\rangle^{(+)}$ zu bestimmen).

f) Bestimmen Sie die Konstante D!

g) Berechnen Sie $\langle H\rangle_\eta$ aus dem Spektraltheorem für $G^{(+)}(\omega)$ für $\eta \neq 0$!

h) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\eta\to 0}\langle H\rangle_\eta = \frac{1}{2}T\ !$$