Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 24 — Schwinger-Bosonen
a und b seinen bosonische Vernichter ("Schwinger-Bosonen"). Zeigen Sie, dass durch

$$S_+ = a^\dagger b \,, \quad S_- = b^\dagger a \,, \quad S_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b)$$

ein Spin definiert wird!

Weiter werde definiert:

$$|S, M\rangle = \frac{\left(a^\dagger\right)^{S+M}}{\sqrt{(S+M)!}} \frac{\left(b^\dagger\right)^{S-M}}{\sqrt{(S-M)!}} |0\rangle$$

wobei $|0\rangle$ das Vakuum der Schwinger-Bosonen ist. Zeigen Sie, dass der Zustand $|S, M\rangle$ gemeinsamer Eigenzustand zu $\boldsymbol{S}^2$ und S_z mit Quantenzahlen S, M ist!

Welcher Unterraum des Schwinger-Bosonen-Fock-Raums ist der Hilbert-Raum eines Spins mit fester Quantenzahl S?

Aufgabe 25 — Holstein-Primakoff-Transformation
Betrachten Sie die Holstein-Primakoff-Transformation, d.h. die folgende Darstellung für den lokalen Spin-Operator $\boldsymbol{S}_i$ durch Bosonen mit $[b_i, b_j^\dagger]_- = \delta_{ij}$ ("Magnonen"):

$$\begin{aligned} S_{iz} &= S - b_i^\dagger b_i \\ S_{i+} &= \sqrt{2S} \sqrt{1 - b_i^\dagger b_i/(2S)}\, b_i \\ S_{i-} &= b_i^\dagger \sqrt{1 - b_i^\dagger/(2S)}\, \sqrt{2S} \,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Drehimpulsalgebra!
b) Zeigen Sie: $\boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1)$
c) Transformieren Sie für $T \to 0$ das Heisenberg-Modell auf ein Magnonengas!