Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 16 — $SU(2)$-Invarianz
Betrachten Sie die SU(2)-Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\boldsymbol{a}) = \exp(i\boldsymbol{a}\boldsymbol{S})$$

beschrieben wird ($\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{S}$ Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \boldsymbol{S}]_-$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$[\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}, S_{i\mu}]_- = \frac{1}{2}\sigma^{(\mu)} \begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix} \qquad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ ($\mu = x, y, z$) sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$ unter der SU(2)-Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!

Aufgabe 17 — Atomarer Limes
Gegeben ist das Hubbard-Modell im atomaren Limes,

$$H = \epsilon_0 \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma}\hat{n}_{i-\sigma} \ .$$

Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potenzial!

Welche Werte nimmt die Entropie (abhängig von den Modellparametern) in den Grenzfällen $T \to \infty$ und $T \to 0$ an?

Aufgabe 18 — Hermitescher Hamilton-Operator
Gegeben ist der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} c^\dagger_\alpha c_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\delta\gamma} c^\dagger_\alpha c^\dagger_\beta c_\gamma c_\delta \ .$$

Was folgt für die (i.allg. komplexen) Matrixelemente $t_{\alpha\beta}$, $U_{\alpha\beta\delta\gamma}$ aus der Forderung nach Hermitizität: $H = H^\dagger$? Beweisen Sie Ihre Aussagen!