Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 7 — Doppelbesetzung
Zeigen Sie für Spin-1/2-Fermionen ($\varepsilon = -1$), dass

$$0 \le \langle d_i \rangle \le 1$$

wobei $d_i = \hat{n}_{i\uparrow}\hat{n}_{i\downarrow}$ die Doppelbesetzung bezeichnet.

Aufgabe 8 — lokaler Spin
Für ein Gittermodell sei die Orthonormalbasis des Ein-Teilchen-Hilbert-Raums durch $\{|i\sigma\rangle\}$ gegeben, wobei i die Plätze eines Gitters indiziert und $\sigma =\uparrow,\downarrow$.

a) Verifizieren Sie für die Observable "lokaler Spin" $\boldsymbol{S}_{i\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} c^\dagger_{i\sigma}\sigma^{(\mu)}_{\sigma\sigma'}c_{i\sigma'}$ (mit $\mu = x, y, z$ und $\sigma^{(\mu)}$: Pauli-Matrizen) die Drehimpulsalgebra

$$[S_{ix}, S_{iy}]_- = iS_{iz} \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen)} \quad !$$

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{S}_i^2$!

Aufgabe 9 — Feldoperatoren
Gegeben ist ein Coulomb-wechselwirkendes System von spinlosen Teilchen im äußeren Potenzial $V(\boldsymbol{r})$. Begründen Sie die folgende Darstellung des Hamilton-Operators:

$$H = \int d^3r\ \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\left(-\frac{1}{2m}\Delta + V(\boldsymbol{r})\right)\psi(\boldsymbol{r})$$
$$+\frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\ \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\psi^\dagger(\boldsymbol{r}')\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\psi(\boldsymbol{r}')\psi(\boldsymbol{r})$$

indem Sie von der allgemeinen Darstellung von Operatoren in zweiter Quantisierung ausgehen und auf die Ortsdarstellung spezialisieren!

Aufgabe 10 — Krylov space
Let H be the Hamiltonian of the system and $|u_0\rangle$ an arbitary "initial" state. Consider the following iterative construction of states $|u_k\rangle$:

$$|u_k\rangle = H|u_{k-1}\rangle - \sum_{i=0}^{k-1} P_{u_i}H|u_{k-1}\rangle$$

where

$P_{u_i}|\psi\rangle = |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle/\langle u_i|u_i\rangle$ is a projector.

(a) Give an interpretation of this construction !

(b) Prove that $\{|u_0\rangle, |u_1\rangle, ..., |u_{n-1}\rangle\}$ is a set of mutually orthogonal states !

(c) Show that

$$|u_{k+1}\rangle = H|u_k\rangle - a_k|u_k\rangle - b_k^2|u_{k-1}\rangle$$

with $(k = 0, 1, ..., n-1)$:

$$a_k = \frac{\langle u_k|H|u_k\rangle}{\langle u_k|u_k\rangle} \qquad b_k^2 = \frac{\langle u_k|u_k\rangle}{\langle u_{k-1}|u_{k-1}\rangle} \qquad (b_0 = 0) \qquad !$$

(d) Define $|v_i\rangle = |u_i\rangle/\sqrt{\langle u_i|u_i\rangle}$. Show that $T_{ij} = \langle v_i|H|v_j\rangle$ is given by:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a_0 & b_1 & & & \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & b_2 & a_2 & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & b_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad !$$