

Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 18 — Ein-Magnon-Zustand

Es sei $|F\rangle = |S, S, \dots\rangle$ der vollständig polarisierte ferromagnetische Grundzustand des Heisenberg-Modells $H = -J \sum_{ij}^{n.N} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - B \sum_i S_{iz}$ für $J > 0$ und

$$|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2SL}} S_-(\mathbf{k}) |F\rangle$$

der Ein-Magnon-Zustand mit Wellenvektor \mathbf{k} . Benutzen Sie die Definition

$$S_\mu(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^L e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}_i} S_{i\mu}, \quad (\mu = +, -, z)$$

die Kommutatorrelationen

$$[S_z(\mathbf{k}), S_\pm(\mathbf{k}')]_- = \pm S_\pm(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad [S_+(\mathbf{k}), S_-(\mathbf{k}')]_- = 2S_z(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$$

um zu zeigen, dass $|\mathbf{k}\rangle$ ein Eigenzustand von

$$H = -\frac{1}{L} \sum_{\mathbf{k}} J(\mathbf{k}) (S_+(\mathbf{k}) S_-(\mathbf{k}) + S_z(\mathbf{k}) S_z(\mathbf{k})) - BS_z(0)$$

ist!

Aufgabe 19 — Holstein-Primakoff-Transformation

Betrachten Sie die Holstein-Primakoff-Transformation, d.h. die folgende Darstellung für den lokalen Spin-Operator \mathbf{S}_i durch Bosonen (mit $[b_i, b_j^\dagger]_- = \delta_{ij}$):

$$\begin{aligned} S_{iz} &= S - b_i^\dagger b_i \\ S_{i+} &= \sqrt{2S} \sqrt{1 - b_i^\dagger b_i / (2S)} b_i \\ S_{i-} &= b_i^\dagger \sqrt{1 - b_i^\dagger b_i / (2S)} \sqrt{2S}. \end{aligned}$$

- Zeigen Sie die Gültigkeit der Drehimpulsalgebra!
- Zeigen Sie: $\mathbf{S}_i^2 = S(S+1)$
- Transformieren Sie für $T \rightarrow 0$ das Heisenberg-Modell auf ein Magnonengas!

Aufgabe 20 — Blochsches $T^{3/2}$ -Gesetz

Berechnen Sie die Temperaturabhängigkeit des magnetischen Moments $m = \langle S_{iz} \rangle$ in der linearen Spinwellennäherung, d.h. für das durch $H = E_0 + \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}$ gegebene Magnonen-Gas, und diskutieren Sie den Limes $T \rightarrow 0$!

Aufgabe 21 — Spektraldichte

a) Zeigen Sie, dass die Spektraldichte für $T = 0$ als

$$S_{AB}(\omega) = \langle 0|A\delta(\omega - (\mathcal{H} - \mathcal{E}_0))B|0\rangle \pm \langle 0|B\delta(\omega - (\mathcal{E}_0 - \mathcal{H}))A|0\rangle$$

geschrieben werden kann und interpretieren Sie diesen Ausdruck!

b) Berechnen Sie die Spektraldichte $S_{AB}(\omega)$ für den Fall, dass $[A, \mathcal{H}]_- = 0$!