Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 17 — Zwei-Platz-Hubbard-Modell
Gegeben ist das Hubbard-Modell für $L = 2$ Plätze:

$$H = \epsilon_0 \sum_\sigma (n_{1\sigma} + n_{2\sigma}) + t \sum_\sigma (c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma} + c_{2\sigma}^\dagger c_{1\sigma}) + U n_{1\sigma} n_{1-\sigma} + U n_{2\sigma} n_{2-\sigma} \ .$$

a) Konstruieren Sie die zu H gehörige Matrix in der Besetzungszahldarstellung! Nutzen Sie dabei aus, dass H blockdiagonal bezüglich der Teilchenzahl ist!

b) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie E_0 für $N = 2$ Elektronen! Überprüfen Sie die Grenzfälle $U = 0$ und $t = 0$!

c) Entwickeln Sie die Grundzustandsenergie $E_0 = E_0(U)$ in $1/U$ und vergleichen Sie das Resultat in führender Ordnung in $1/U$ mit der Grundzustandsenergie des entsprechenden Zwei-Spin-Heisenberg-Modells!

d) Berechnen Sie jetzt sämtliche Eigenwerte von $\mathcal{H} = H - \mu\hat{N}$ und bestimmen Sie – in Abhängigkeit von μ – die Grundzustandsenergie von $\mathcal{H}$ und die jeweilige Teilchenzahl N.

e) Es sei $\mu = \epsilon_0 + U/2$. Bestimmen Sie die niedrigste Anregungsenergie von $\mathcal{H}$ und vergleichen Sie mit der niedrigsten Anregungsenergie des Zwei-Spin-Heisenberg-Modells für $U \to \infty$!

f) Welche niedrigste Anregung ergibt sich für $\mu = 0$?