Übungen zur Quantenmechanik III: Vielteilchenphysik

Aufgabe 12 — Sommerfeld-Entwicklung
Nutzen Sie die Sommerfeld-Entwicklung

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega-\mu)F(\omega) = \int_{-\infty}^{\mu} d\omega F(\omega) + \frac{\pi^2}{6}T^2 F'(\mu) + \mathcal{O}(T/\mu)^4$$

($f(E) = 1/(\exp(\beta E)+1)$ Fermi-Funktion), um die Temperaturabhängigkeit des chemischen Potenzials

$$\mu = \epsilon_F - \frac{\pi^2}{6}T^2\frac{\rho_0'(\epsilon_F)}{\rho_0(\epsilon_F)} + \cdots$$

und der inneren Energie

$$U = E_0 + \frac{\pi^2}{6}T^2\rho_0(\epsilon_F) + \cdots$$

für ein Fermi-Gas mit freier Zustandsdichte $\rho_0(\omega)$ bei fester Teilchenzahl abzuleiten!

Aufgabe 13 — Atomarer Limes
Gegeben ist das Hubbard-Modell im atomaren Limes,

$$H = \epsilon_0 \sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma} + \frac{U}{2}\sum_{i\sigma} \hat{n}_{i\sigma}\hat{n}_{i-\sigma} \ .$$

Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme und das großkanonische Potenzial!

Welche Werte nimmt die Entropie (abhängig von den Modellparametern) in den Grenzfällen $T \to \infty$ und $T \to 0$ an?

Aufgabe 14 — lokaler Spin
a) Verifizieren Sie für die Observable "lokaler Spin" $\mathbf{S}_{i\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\sigma'} c_{i\sigma}^\dagger \sigma_{\sigma\sigma'}^{(\mu)} c_{i\sigma'}$ (mit $\mu = x, y, z$ und $\sigma^{(\mu)}$: Pauli-Matrizen) die Drehimpulsalgebra

$$[S_{ix}, S_{iy}]_- = iS_{iz} \qquad \text{(und zyklische Vertauschungen)} \quad !$$

b) Berechnen Sie $\mathbf{S}_i^2$!

Aufgabe 15 — Baker-Hausdorff-Theorem

Beweisen Sie (durch Taylor-Entwicklung von $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ um $\lambda = 0$), dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = e^{-\lambda L_A} B$$

für zwei beliebige lineare Operatoren A, B, für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $L_A(X) = [X, A]_-$!

Werten Sie dies für den Spezialfall $[A, [A, B]_-]_- = [B, [A, B]_-]_- = 0$ aus, und zeigen Sie (durch Aufstellen und Lösen einer Differenzialgleichung für $g(\lambda) = e^{\lambda A} e^{\lambda B}$), dass

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]_-/2} \qquad !$$

Aufgabe 16 — $SU(2)$-Invarianz
Betrachten Sie die SU(2)-Gruppe der Spinrotationen, die durch den unitären Operator

$$U(\mathbf{a}) = \exp(i\mathbf{a}\mathbf{S})$$

beschrieben wird ($\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{S}$ Gesamtspin).

a) Berechnen Sie $[c_{i\sigma}, \mathbf{S}]_-$!

b) Zeigen Sie, dass man das Resultat kompakt als Gleichung für zweikomponentige "Spinoren" schreiben kann:

$$[\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}, S_{i\mu}]_- = \frac{1}{2}\sigma^{(\mu)} \begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix} \qquad !$$

$\sigma^{(\mu)}$ $(\mu = x, z, y)$ sind die Pauli-Matrizen.

c) Wie transformiert sich der Vernichter $\begin{pmatrix} c_{i\uparrow} \\ c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$ unter der SU(2)-Transformation?

d) Zeigen Sie, dass der Hubbard-Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist, indem Sie ihn so umformen, dass die Invarianz offensichtlich wird!