Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 22 — Zeitinversion und Drehungen

Zeigen Sie, dass die Symmetrietransformationen Zeitinversion und Drehung kommutativ sind!

Aufgabe 23 — Zeitunabhängige Störungstheorie

Testen Sie die Konzepte der zeitunabhängigen Störungstheorie an einem einfache Modellsystem, für das der Hilbert-Raum zweidimensional ist! Der Hamilton-Operator $H = H_0 + H_1$ sei wie üblich in einen freien Term und einen Störterm zerlegt. In der zur Eigenbasis von H_0 gehörigen Darstellung ist:

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} , \qquad H_1 = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} .$$

a) Lösen Sie zunächst das zu H gehörige Eigenwertproblem exakt, und berechnen Sie insbesondere die Eigenwerte von H!

b) Führen Sie einen Kopplungsparameter ein, $H_1 \to \lambda H_1$, und entwickeln Sie die Eigenenergien in Potenzen von λ bis (einschließlich) zur Ordnung λ^2!

c) Vergleichen Sie mit dem Resultat der Schrödingerschen Störungstheorie zweiter Ordnung für $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ (keine Entartung) bzw. erster Ordnung für $\epsilon_1 = \epsilon_1$ (Entartung)!

d) Berechnen Sie die Energiekorrektur im Rahmen der Brillouin-Wigner-Störungstheorie in *beliebiger* Ordnung! Summieren Sie über alle Ordnungen, um das exakte Resultat aus a) zu reproduzieren!

Aufgabe 24 — Störungstheorie: Anwendung auf das He-Atom

Betrachten Sie das He-Atom bzw. ein $(Z-2)$-fach ionisiertes Atom:

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} ,$$

und fassen Sie die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen als kleine Störung auf! Approximieren Sie die Grundzustandsenergie mit Hilfe zeitunabhängiger Störungstheorie erster Ordnung und vergleichen Sie mit dem Resultat des Ritzschen Variationsverfahrens (s. Vorlesung)!

Aufgabe 25 — Zeitabhängige Störungstheorie
Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System mit Hamilton-Operator $H_t = H_0 + V_t$. Die Eigenenergien des ungestörten Terms H_0 seien entartet. Der Störterm V_t sei explizit zeitabhängig. In einer speziellen Darstellung gelte:

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} , \qquad V_t = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} \cdot \Theta(t)$$

mit reellem V und der Stufenfunktion $\Theta(t)$.

Zur Zeit $t = 0^-$ befinde sich das System im Zustand $|\Psi\rangle = (1, 0)^\dagger$. Berechnen Sie die exakte Lösung $|\Psi(t)\rangle$ der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für beliebige Zeiten t! Diskutieren Sie dazu die Unstetigkeit von H_t bei $t = 0$! Wie verhält sich die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$? Berechnen Sie die zeitabhängige Übergangswahrscheinlichkeit von einem ungestörtem Zustand in den anderen. Vergleichen Sie mit dem Resultat der zeitabhängigen Störungstheorie!

Aufgabe 26 — Plötzliche Änderung des Hamilton-Operators
Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator (Masse m, Frequenz ω) befinde sich für $t < 0$ in seinem Grundzustand

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) .$$

Zur Zeit $t = 0$ ändere sich die Frequenz vom Wert ω plötzlich auf einen Wert ω (Änderung der Federkonstanten).

Berechnen Sie (durch elementare Überlegungen) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Oszillator zu einer Zeit $t > 0$ in seinem *neuen* Grundzustand befindet! Begründen Sie, dass die zeitabhängige Störungstheorie hier nicht direkt anwendbar ist!