# Übungen zur Quantenmechanik II

**Aufgabe 18 — Drehimpuls-Algebra**
a) $\mathbf{J}$ sei ein Drehimpuls, $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ die zugehörigen Leiteroperatoren. Zeigen Sie die folgenden Relationen!

$$[\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{J}] = i\hbar\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{J} \qquad (\mathbf{a},\ \mathbf{b}\text{ beliebige Vektoren})$$

$$[J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$$

$$J_\pm J_\mp = \mathbf{J}^2 - J_z^2 \pm \hbar J_z$$

b) $\{|jm\rangle\}$ sei eine ONB gemeinsamer Eigenzustände von $\mathbf{J}^2$ und $J_z$. Es gilt:

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\;|jm\pm 1\rangle\ .$$

Zeigen Sie, dass

$$|jm\rangle = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}}\;J_\mp^{j-m}|j\pm j\rangle$$

**Aufgabe 19 — Ortsabhängige Phase**
Eine Symmetrietransformation ist allgemein gegeben durch einen (anti-)unitären Operator $T$, so dass

$$|\Psi\rangle \mapsto |\Psi'\rangle = T|\Psi\rangle\ ,$$

$$A \mapsto A' = TAT^\dagger$$

(s. Vorlesung, Wignersches Theorem).
Betrachten Sie speziell die Symmetrietransformation, die für Wellenfunktionen, also in Ortsdarstellung durch

$$\Psi(\mathbf{r}) \mapsto \Psi(\mathbf{r})' = e^{i\varphi(\mathbf{r})}\Psi(\mathbf{r})$$

definiert ist! $\varphi(\mathbf{r})$ ist eine vorgegebene ortsabhängige Phase.

Wie lautet $T$ in Ortsdarstellung? Ist $T$ unitär? Wie transformieren sich Orts- und Impulsoperator? Welche physikalische Bedeutung hat diese Symmetrietransformation?

**Aufgabe 20 — Bahn- und Spin-Raum**
Für ein Teilchen mit Spin $S$ ist der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ durch das Produkt von Bahn- und Spin-Raum gegeben:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathrm{B} \otimes \mathcal{H}_\mathrm{S} \,.$$

Warum ist es eigentlich nicht möglich, $\mathcal{H}$ als direkte (orthogonale) Summe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathrm{B} \oplus \mathcal{H}_\mathrm{S} \,.$$

zu definieren? Zeigen Sie, dass dies zu Widersprüchen führen würde!

**Aufgabe 21 — Spinpolarisation**
Betrachten Sie den zweidimensionalen Spin-Raum $\mathcal{H}_S$ zu $S = 1/2$ und Observable Elektronenspin

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\,(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = \frac{\hbar}{2}\,\sigma = \frac{\hbar}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \,.$$

$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ sei ein Vektor mit reellen $P_i$, so dass $|\mathbf{P}| \leq 1$ ("Spinpolarisation"). Das System befinde sich in einem (reinen oder gemischten) Zustand, der durch die $2 \times 2$ Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P} \cdot \sigma)$$

gegeben ist.

a) Verifizieren Sie, dass $\rho$ normiert ist: $\mathrm{Sp}(\rho) = 1$!
b) Untersuchen Sie, für welches $\mathbf{P}$ ein reiner Zustand vorliegt!
c) Zeigen Sie, dass $\langle \sigma_i \rangle = P_i$ für $i = x, y, z$!
d) Es sei $\mathbf{P} = (0, 0, P)$. Zeigen Sie, dass $P = (N_\uparrow - N_\downarrow)/(N_\uparrow + N_\downarrow)$ wobei $N_{\uparrow,\downarrow}$ die Zahl der Elektronen mit Spin $m_s = \uparrow, \downarrow$ ist!
e) $\mathbf{e} = (\sin\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta)$ sei der Einheitsvektor in $(\vartheta, \varphi)$-Richtung. Bestimmen Sie die Eigenwerte der $\mathbf{e}$-Komponente des Spins, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}$, und zeigen Sie, dass

$$|\mathbf{e}_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix} \qquad |\mathbf{e}_-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

orthonormierte Eigenzustände von $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}$ sind!
f) Das System befinde sich im Zustand $\rho = (1 + \mathbf{P} \cdot \sigma)/2$ mit $P = (0, 0, P)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei einer Messung von $\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}$ das Resultat $\pm\hbar/2$ gefunden? Diskutieren Sie die $\vartheta, \varphi$-Abhängigkeit und den Fall $P = 0$!