Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 11 — Kramers-Kronig-Relationen

Betrachten Sie die Fourier-transformierte (energieabhängige) Green-Funktion

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;E) = i\hbar \sum_n \frac{\langle \mathbf{r}|E_n\rangle\langle E_n|\mathbf{r}_0\rangle}{E-E_n+i0^+} = \sum_n \frac{\alpha_n}{E-E_n+i0^+}$$

und beweisen Sie die Kramers-Kronig-Relationen

$$\mathrm{Re}\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;E) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dE'\, \frac{\mathrm{Im}\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;E')}{E-E'} \,,$$

$$\mathrm{Im}\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;E) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} dE'\, \frac{\mathrm{Re}\, G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;E')}{E-E'} \;!$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE'\, \frac{G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0;E')}{E-E'-i0^+}$$

mit Hilfe des Residuensatzes und nutzen Sie die Dirac-Identität

$$\frac{1}{x+i0^+} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \;!$$

Aufgabe 12 — Feynman-Kac-Formel

Beweisen Sie die folgende Formel für die Grundzustandsenergie

$$E_0 = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\beta} \ln \int d^3r\, G(\mathbf{r},-i\hbar\beta;\mathbf{r},0)$$

und überprüfen Sie den Ausdruck für den Fall $V(\mathbf{r})=0$ (freies Teilchen)!

Aufgabe 13 — Dyson-Gleichung und Dirac-Bild

Untersuchen Sie, welche Beziehung zwischen der Dyson-Gleichung für die Green-Funktion,

$$G(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,0) = G_0(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,0) - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1 \int d^3r_1\, G_0(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_1,t_1)\, V_{t_1}(\mathbf{r}_1)\, G(\mathbf{r}_1,t_1;\mathbf{r}_0,0)$$

und der Integralgleichung für den Zeitentwicklungsoperator im Dirac-Bild,

$$U_{\mathrm{D}}(t,0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\, V_{t_1}^{(D)}(t_1) U_{\mathrm{D}}(t_1,0)$$

besteht!