Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 7 — Dyson-Reihe
Folgern Sie aus der Schrödinger-Gleichung,

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H_t|\Psi(t)\rangle \,,$$

dass

$$|\Psi(t+dt)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_t dt\right)|\Psi(t)\rangle$$

und dass somit

$$U(t+dt,t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_t dt\right) \,,$$

wobei H_t explizit zeitabhängig sein kann!

Begründen Sie damit die Darstellung

$$U(t,0) = T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t H_\tau d\tau\right)$$

(T: Zeitordnungsoperator) für den Zeitentwicklungsoperator!

Aufgabe 8 — Wechselwirkungsbild
Leiten Sie für Wechselwirkungsbild (Dirac-Bild) mit $H_t = H_0 + V_t$ die folgenden Bewegungsgleichungen ab!

Zustand:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi^{(D)}(t)\rangle = V_t^{(D)}(t)|\Psi^{(D)}(t)\rangle \,,$$

Observable:

$$i\hbar\frac{d}{dt}A_t^{(D)}(t) = [A_t^{(D)}(t), H_0] + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A_t^{(D)}(t) \,,$$

Dichteoperator:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho^{(D)}(t) = [V_t^{(D)}(t), \rho^{(D)}(t)] \,.$$

Aufgabe 9 — Trotter-Formel
Zeigen Sie, dass

$$\exp\left(-\alpha(T+V)\right) = \exp\left(-\alpha T\right)\exp\left(-\alpha V\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

für beliebige Operatoren T und V und reelles α!
Hinweis: Betrachten Sie die Taylor-Entwicklung der operatorwertigen Funktion $F(\alpha) = \exp\left(\alpha T\right)\exp\left(-\alpha(T+V)\right)\exp\left(\alpha V\right)$ bis zur zweiten Ordnung in α.

Aufgabe 10 — Teilchen im elektronagnetischen Feld
Betrachten Sie ein Teilchen (Masse m, Ladung q) in einem elektrischen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

und einem magnetischen Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t)\,.$$

$\varphi(\mathbf{r},t)$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ sind das skalare bzw. das Vektorpotenzial, c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

a) Überzeugen Sie sich, dass die *klassische* Lagrange-Funktion durch

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - q\varphi(\mathbf{r},t) + \frac{q}{c}\,\dot{\mathbf{r}}\,\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$$

gegeben ist!

b) Bestimmen Sie den zur Koordinate $\mathbf{r}$ konjugierten Impuls $\mathbf{p} = \partial L/\partial\,\dot{\mathbf{r}}$ und vergleichen Sie mit dem kinematischen (mechanischen) Impuls!

c) Leiten Sie die klassische Hamilton-Funktion her!

d) Wie lautet der Hamilton-Operator? Nutzen Sie das Korrespondenzprinzip und beachten Sie die Symmetrisierungsvorschrift!

e) Stellen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung auf (Ortsdarstellung) und leiten Sie eine Kontinuitätsgleichung ab, die die Wahrscheinlichkeitserhaltung beschreibt!