Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 1 — dyadisches Produkt
Bestimmen Sie den zum dyadischen Produkt $|\alpha\rangle\langle\beta|$ adjungierten Operator!

Aufgabe 2 — Operatorpotenz
A und B seien lineare Operatoren mit

$$[A, B] = i \, .$$

Zeigen Sie, dass

$$[A, B^n] = inB^{n-1} \, , \qquad [A^n, B] = inA^{n-1} \, ,$$

$$[A, e^A] = 0 \, , \qquad [A, e^B] = ie^B \quad !$$

Aufgabe 3 — Exponentialfunktion
λ sei ein reeller Parameter, und A und B seien (nicht von λ abhängige) lineare Operatoren.

a) Schreiben Sie

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$$

und berechnen Sie die Koeffizienten α_n (α_n Operatoren)!

b) Zeigen Sie, dass aus

$$[A, [A, B]] = 0$$

folgt:

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda [A, B] \, !$$

c) Benutzen Sie 1) und 2), um die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{d\lambda}(e^{\lambda A} e^{\lambda B}) = (A + B + \lambda [A, B]) \, (e^{\lambda A} e^{\lambda B})$$

für $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ abzuleiten!

d) Beweisen Sie mit 3) für $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$, dass:

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}\,!$$

Aufgabe 4 — Dichteoperator
Untersuchen Sie, inwieweit sich die charakteristischen Eigenschaften des Dichteoperators,

$$\rho = \sum_k w_k |\Psi_k\rangle\langle\Psi_k|$$

ändern, wenn die Zustände $|\Psi_k\rangle$ zwar normiert aber nicht paarweise orthogonal sind!

Aufgabe 5 — Heisenbergsche Unschärferelation
Betrachten Sie den Beweis der Unschärferelation

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$$

für einen beliebigen *gemischten* Zustand. Diskutieren Sie den Spezialfall $\Delta B = 0$!

Aufgabe 6 — Darstellung
$\{|n\rangle\}$ mit $n = 1, 2, ..., L$ sei eine ONB des Hilbert-Raums (L-dimensional) und

$$A = \sum_{n=1}^{L} |n\rangle\langle n+1|$$

ein linearer Operator, wobei per Definition $|L+1\rangle = |1\rangle$ (periodische Randbedingungen).

a) Untersuchen Sie A auf Hermitizität und Unitarität!

b) Finden Sie die zu A gehörige Matrix in der n-Darstellung!

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A!

d) Konstruieren Sie eine ONB $\{|E_j\rangle\}$ gemeinsamer Eigenzustände von A und $A^\dagger$!

e) Es sei $H = E_0 + W(A + A^\dagger)$ mit reellen Parametern E_0 und W. Wie sieht H in der E-Darstellung aus? Geben sie Eigenwerte und Eigenzustände von H an!