Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 47 — Zeitabhängige Störungstheorie
Gegeben sei ein Problem der Form

$$H(t) = H_0 + H_1(t)\ .$$

Die Stärke der zeitabhängigen "Störung" $H_1(t)$ kann über einen Parameter λ reguliert werden: $H_1(t) = \lambda \overline{H}_1(t)$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Zustand im Dirac-Bild auf, und zeigen Sie, dass diese äquivalent mit der folgenden Integralgleichung ist:

$$|\Psi_D(t)\rangle = |\Psi_0\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' H_{1,D}(t')|\Psi_D(t')\rangle\ !$$

Welche Bedeutung hat $|\Psi_0\rangle$?

b) Lösen Sie die Integralgleichung durch Iterieren und brechen Sie die Iteration so ab, dass der Zustand bis einschließlich erster Ordnung in λ korrekt ist!

c) Transformieren Sie die so gewonnene Lösung ins Schrödinger-Bild zurück, und berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(t) = |\langle n|\Psi(t)\rangle|^2$$

für $|\Psi_0\rangle = |m\rangle$, wobei $|m\rangle$ und $|n\rangle$ Eigenzustände des ungestörten Hamiltonians sind: $H_0|m\rangle = E_m|m\rangle$ und $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$ (mit $E_m \neq E_n$). Nehmen Sie dazu an, dass H_1 zeitunabhängig ist!

d) Es ist

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1\ .$$

Nutzen Sie diese Relation um zu zeigen, dass für $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} P(t)/t = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|H_1|m\rangle|^2 \delta(E_n - E_m)\ !$$

e) Wie ändert sich das Resultat, falls die Störung nicht konstant sondern periodisch ist: $H_1(t) = H_1\cos(\omega t)$?

Aufgabe 48 — δ-Potenzial
Analysieren Sie das Energieeigenwertproblem in einer Raumdimension für ein δ-Potenzial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

mit

$$V(x) = -V_0\delta(x)\,, \qquad V_0 > 0\,.$$

a) Integrieren Sie die Eigenwertgleichung über ein kleines Intervall $[-\eta,\eta]$ mit $\eta \to 0$ um $x = 0$, und begründen Sie so die folgenden für ein δ-Potenzial charakteristischen Anschlussbedingungen bei $x = 0$:

$$\begin{aligned} &1) \quad \varphi(x) \quad \text{stetig in } x = 0\,, \\ &2) \quad \lim_{\eta\to 0}(\varphi'(\eta) - \varphi'(-\eta)) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\varphi(0)\,! \end{aligned} \tag{1}$$

b) Gibt es für dieses Potenzial gebundene Eigenzustände mit $E < 0$? Stellen Sie zur Beantwortung dieser Frage einen Ansatz für die Wellenfunktion in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ auf, und legen Sie die Parameter wie üblich fest! Beachten Sie dabei die in a) abgeleiteten Anschlussbedingungen!

Bestimmen Sie die Anzahl und die Eigenenergien der gebundenen Zustände!

Aufgabe 49 — Reflexion am δ-Potenzial
Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten für die Streuung an einem δ-Potenzial:

$$V(x) = V_0\delta(x)\,, \qquad V_0 > 0\,!$$

Aufgabe 50 — Harmonischer Oszillator
Das Energieeigenwertproblem eines harmonischen Oszillators der Frequenz ω ist durch

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

gegeben.

a) Substituieren Sie

$$q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x \qquad \text{und} \qquad \eta = \frac{2E}{\hbar\omega}\,,$$

um das Problem in die Form

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} + (\eta - q^2)\right]\varphi(q) = 0$$

zu bringen!

b) Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\pm(q) = e^{\pm q^2/2}$$

die Differenzialgleichung für $q \to \pm\infty$ (also für $\eta - q^2 \sim -q^2$) löst!

c) Für den allgemeinen Fall motiviert dies den Ansatz

$$\varphi(q) = v(q)e^{-q^2/2}\,.$$

Zeigen Sie, dass $v(q)$ der Differenzialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} - 2q\frac{d}{dq} + (\eta - 1)\right] v(q) = 0$$

genügen muss!

d) Lösen Sie diese Differenzialgleichung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes, d.h.

$$v_+(q) = \sum_{k=0,2,4,\ldots} a_k q^k$$

bzw.

$$v_-(q) = \sum_{k=1,3,5,\ldots} a_k q^k\ !$$

Geben Sie dazu zunächst eine Begründung an, warum es Sinn macht, sich auf gerade bzw. ungerade Potenzen von q zu beschränken!

Setzen Sie jetzt in die Differenzialgleichung ein und zeigen Sie so, dass

$$\sum_k \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(\eta - 1 - 2k)\right] q^k = 0\ !$$

e) Da dies für alle q gilt, ergibt sich die folgende Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten:

$$a_{k+2} = \frac{2k + 1 - \eta}{(k+1)(k+2)}\, a_k\ .$$

Nehmen Sie an, dass $a_k \neq 0$ für alle k. Zeigen Sie, dass dann für große k

$$\frac{a_{k+2}}{a_k} \approx \frac{2}{k}$$

gelten muss!

f) Vergleichen Sie dies für gerade k mit der Entwicklung

$$e^{(q^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2k}}{k!} = \sum_{m=0,2,4,\ldots} \frac{q^m}{(m/2)!}$$

Wie verhalten sich hier die Koeffizienten für große k?
Begründen Sie auf diese Weise, dass die Potenzreihe abbrechen muss!

g) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Hamilton-Operators des harmonischen Oszillators durch

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

gegeben sind!