Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 43 — Vektoroperatoren
Der Impulsoperator $\boldsymbol{P}$ ist ein Vektoroperator, wenn gezeigt werden kann, dass

$$[J_i, P_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} P_k \, .$$

Verifizieren Sie diese Relationen folgendermaßen:

a) Im physikalischen Raum (Anschauungsraum) sind durch $T_y(a)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + a\hat{y}$ eine Translation um a entlang $\hat{y}$ und durch $R_x(\gamma)$ eine Drehung um die x-Achse mit Winkel γ definiert. Zeigen Sie, dass

$$R_x(\gamma) T_y(a) R_x(-\gamma) = T_{\hat{n}}(b) \, ,$$

und bestimmen Sie b und den Einheitsvektor $\hat{n}$!

b) Nach dem Wignerschen Theorem werden Translation und Rotation durch unitäre Operatoren im Hilbert-Raum dargestellt, für die dann eine entsprechende Relation gilt. Geben Sie die unitären Operatoren und die Relation an!

c) Entwickeln Sie in Potenzen von γ und a, und vernachlässigen Sie Terme quadratischer Ordnung um zu zeigen, dass

$$[J_x, P_y] = i\hbar P_z \, ,$$

d.h. den Spezialfall $i = x$ und $j = y$ der allgemeinen Relation.

Aufgabe 44 — Zeitinversion
Betrachten Sie ein spinloses Teilchen in einer Raumdimension. Der Hilbert-Raum ist $\mathcal{H} = L^{(2)}(\boldsymbol{R})$. Auf $\mathcal{H}$ werde durch

$$K\varphi(x) = \varphi(x)^*$$

ein Operator K definiert. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von K!

a) $K^{-1} = K$.

b) K ist antilinear: $K(\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)) = \alpha_1^* K\varphi_1(x) + \alpha_2^* K\varphi_2(x)$.

c) K ist antihermitesch: $\langle\varphi_1|K\varphi_2\rangle = \langle K\varphi_1|\varphi_2\rangle^*$.

d) K ist antiunitär: $\langle K\varphi_1|K\varphi_2\rangle = \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle^*$.

e) $KXK = X$, $KPK = -P$, $KHK = H$ für $H = P^2/2m + V(X)$.

f) K ist die antiunitäre Darstellung der Zeitinversion: Es sei H zeitumkehrinvariant. Wenn $\varphi(x,t)$ eine Lösung der Schrödinger-Gleichung ist, dann auch $K\varphi(x,-t)$.

g) Die Eigenzustände von H können rein reell oder rein imaginär gewählt werden.

Aufgabe 45 — Kommutatoren
Berechnen Sie explizit die folgenden Kommutatoren!

a) $[X^n, P]$.

b) $[P^n, X]$.

c) $[P, X^{-1}]$.

d) $[f(P), X]$.

e) $[L_x, L_y]$ für $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$.

f) $[\boldsymbol{L}^2, L_z]$.

g) $[\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{P}]$

Aufgabe 46 — Zwei-Spin-Problem
Betrachten Sie ein System mit zwei Spins-$1/2$. Der Hamilton-Operator sei:

$$H = J\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2 \,,$$

wobei $J > 0$. Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ dieses zusammengesetzten Systems ist das Tensorprodukt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ der Hilbert-Räume der einzelnen Spins.

a) Geben Sie eine ONB von $\mathcal{H}_1$ aus Eigenzuständen von S_{1z} an! Geben Sie eine analoge ONB von $\mathcal{H}_2$ an! Geben Sie eine ONB von $\mathcal{H}$ an!

b) Stellen Sie H in dieser ONB als Matrix dar!

c) Lösen Sie jetzt das Energie-Eigenwertproblem!

d) Zeigen Sie, dass H rotationsinvariant ist!

e) Ist der Grundzustand rotationsinvariant?