Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 39 — Shannon-Information
Für ein Quantensystem im gemischten Zustand ρ ist die Shannon-Information durch

$$S = -\,\mathsf{Sp}\,(\rho \ln \rho)$$

definiert. Es sei

$$\rho = \sum_\alpha p_\alpha |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\alpha|$$

mit orthonormalen reinen Zuständen $|\varphi_\alpha\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass $S \geqslant 0$!

b) Zeigen Sie, dass $S = 0$ für einen reinen Zustand!

c) Wie müssen die p_α gewählt werden, damit S maximal wird?

Aufgabe 40 — Unbeschränkte Operatoren
A und B seinen Operatoren mit der Kommutatorrelation $[B, A] = i$. Zeigen Sie, dass mindestens einer der Operatoren nicht beschränkt ist!

Hinweise: Begründen Sie, dass man o.B.d.A. $\|B\| = 1$ annehmen darf, und zeigen Sie zunächst, dass $[B, A^n] = inA^{n-1}$. Nutzen Sie dies aus, um $\|A^n\| \geqslant (n/2)\|A^{n-1}\|$ abzuleiten. Benutzen Sie weiter, dass $\|AA^{n-1}\| \leqslant \|A^{n-1}\|\|A\|$.

Aufgabe 41 — Parität
Der Paritätsoperator Π auf $L^{(2)}(R)$ ist durch

$$\Pi\varphi(x) = \varphi(-x)$$

definiert.

a) Untersuchen Sie Π auf Hermitizität!

b) Untersuchen Sie Π auf Unitarität!

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von Π!

d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G} = \{\mathbf{1}, \Pi\}$ eine (diskrete) Gruppe ist!

e) Berechnen Sie $\Pi X \Pi^\dagger$ und $\Pi P \Pi^\dagger$, wobei $X\varphi(x) = x\varphi(x)$ und $P\varphi(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\varphi(x)$!

f) Der Hamilton-Operator eine Quantensystems sei durch

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$$

gegeben, wobei $V(X) = V(-X)$ ein symmetrisches Potenzial ist. Zeigen Sie, dass Π eine Erhaltungsgröße ist!

g) Unter welchen Umständen muss der Grundzustand von H durch eine symmetrische oder antisymmetrische Wellenfunktion $\varphi_0(x)$ gegeben sein?

Aufgabe 42 — Dynamische Unterdrückung des Tunneleffekts
Es sei

$$H_0 = -\frac{\hbar}{2}\Delta_0\sigma_x = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \Delta_0 \\ \Delta_0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein im Zustand $|\varphi(0)\rangle = (1,0)^T$ zur Zeit $t = 0$ präpariertes System im Zustand $|\varphi(t)\rangle = (0,1)^T$ zur Zeit t zu finden ist, oszilliert mit der Zeit zwischen 0 und 1 ("Tunneln").

Es werde zur Manipulation des Systems ein oszillierendes Feld angekoppelt:

$$H(t) = H_0 - \frac{\hbar}{2}\epsilon\cos(\omega t)\sigma_z = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \epsilon\cos(\omega t) & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -\epsilon\cos(\omega t) \end{pmatrix} .$$

Wie müssen ϵ und ω gewählt werden, damit das Tunneln vollständig unterdrückt wird? Gehen Sie folgendermaßen vor, um das Problem zu lösen:

a) Verwenden Sie den folgenden Ansatz zur Lösung der Schrödinger-Gleichung:

$$|\varphi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t)\exp(i\frac{\epsilon}{2\omega}\sin(\omega t)) \\ c_2(t)\exp(-i\frac{\epsilon}{2\omega}\sin(\omega t)) \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass

$$i\hbar\frac{d}{dt}c_1(t) = -\frac{\hbar}{2}\Delta_0\exp\left(-i\frac{\epsilon}{\omega}\sin(\omega t)\right)c_2(t) \ , \quad i\hbar\frac{d}{dt}c_2(t) = -\frac{\hbar}{2}\Delta_0\exp\left(+i\frac{\epsilon}{\omega}\sin(\omega t)\right)c_1(t) \ !$$

b) Im Limes großer ω können die zeitabhängigen Koeffizienten durch Mittelwerte über eine volle Periode ersetzt werden! Führen Sie diese Mittelung mit Hilfe der Identität

$$J_0(x) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} ds\, e^{ix\sin(\omega s)}$$

für die 0-te Bessel-Funktion durch und lösen Sie das entstehende einfache Differenzialgleichungssystem mit dann konstanten Koeffizienten für die Anfangsbedingung

$$|\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} !$$

c) Für welches ε ist die Verweilwahrscheinlichkeit im Zustand $(1,0)^T$ für alle Zeiten gleich Eins?