Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 34 — Dirac-Bild
Für ein zeitabhängiges Problem der Form

$$H(t) = H_0 + H_1(t)$$

werden durch

$$|\Psi_D(t)\rangle = U_0(t)^\dagger |\Psi(t)\rangle$$

und durch

$$A_D(t) = U_0(t)^\dagger A U_0(t)$$

Zustände und Operatoren im Dirac-Bild definiert. $U_0(t) = e^{-iH_0 t/\hbar}$ ist dabei der “freie” Zeitentwicklungsoperator.

Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $|\Psi_D(t)\rangle$ und $A_D(t)$ her!

Aufgabe 35 — Tensorprodukte
Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes (a, b) \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Aufgabe 36 — Singulärwertzerlegung
Gegeben ist eine beliebige komplexe $M \times N$-Matrix A. Zeigen Sie, dass eine unitäre $M \times M$-Matrix U und eine unitäre $N \times N$-Matrix V existieren, so dass

$$A = UDV^\dagger\ ,$$

wobei D eine $M \times N$-Diagonalmatrix ist, d.h. eine Matrix mit Elementen $D_{ij} = D_i \delta_{ij}$ für $1 \leqslant i, j \leqslant \min(i, j)$ und $D_{ij} = 0$ sonst. D_i heißen die Singulärwerte von A. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Es sei o.B.d.A. $M > N$. Zeigen Sie, dass $A^\dagger A$ eine hermitesche und nicht-negativ definite Matrix ist, so dass V als die Matrix definiert werden kann, die $A^\dagger A$ diagonalisiert:

$$A^\dagger A = V d^2 V^\dagger\ ,$$

mit einer $N \times N$ Diagonalmatrix d^2 aus nicht-negativen Elementen. Nehmen Sie o.B.d.A. an, dass alle Diagonalelemente strikt positiv sind.

b) Definieren Sie jetzt die $M \times N$-Matrix

$$\overline{U} = AVd^{-1}\ ,$$

und zeigen Sie, dass $\overline{U}^\dagger \overline{U} = 1$ ist!

c) Zeigen Sie, dass $\overline{U}$ zu einer unitären $M \times M$-Matrix U ergänzt werden kann!

d) Zeigen Sie zuletzt, dass d trivial zu einer $M \times N$-Diagonalmatrix D ergänzt werden kann, so dass

$$A = UDV^\dagger \,!$$

Aufgabe 37 — Verschränkter Zustand oder Produktzustand?
$\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ seien M- bzw. N-dimensionale Hilbert-Räume und $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ein Zustand aus dem Tensorprodukt. Sind $\{|m\rangle\}$ und $\{|n\rangle\}$ Orthonormalbasen von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$, dann lässt sich der Zustand darstellen als

$$|\Phi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |m\rangle \otimes |n\rangle \,.$$

Geben Sie konstruktives Verfahren an (einen prinzipiell programmierbaren Algorithmus), mit dem sich entscheiden lässt, ob $|\Phi\rangle$ ein Produktzustand ist oder ein verschränkter Zustand! (Nutzen Sie dabei die Tatsache aus, dass die Singulärwerte einer Matrix eindeutig bestimmt sind!)

Aufgabe 38 — Dichteoperator
Der Zustand eines Quantensystems werde durch den Dichteoperator

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

a) Ist ρ positiv semidefinit?

b) Handelt es sich um einen reinen oder einen gemischten Zustand?

c) Es werde die Observable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gemessen. Berechnen Sie $\langle A \rangle$!

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei der Messung von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

der Wert $b = -1$?

e) In welchem Zustand befindet sich das Quantensystem nach der Messung von B?

f) In welchem Zustand befindet sich das Quantensystem nach der Messung von B, wenn das Ergebnis $b = -1$ gefunden wurde?