Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 30 — Verweilwahrscheinlichkeit
Es sei $|\varphi(t)\rangle$ der Zustand eines Quantensystems zur Zeit t, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem nicht-stationären Zustand $|\varphi(0)\rangle$ befindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass das System zur Zeit t noch im Zustand $|\varphi(0)\rangle$ anzutreffen ist, ist

$$p_{\text{verweil}}(t) = |\langle\varphi(0)|\varphi(t)\rangle|^2 .$$

a) Zeigen Sie, dass

$$p_{\text{verweil}}(t) = \langle\varphi(t)|P|\varphi(t)\rangle ,$$

wobei P den Projektor auf den Anfangszustand $|\varphi(0)\rangle$ bezeichnet!

b) H sei zeitunabhängig. Zeigen Sie, dass $p_{\text{verweil}}(t)$ für kurze Zeiten durch

$$p_{\text{verweil}}(t) = 1 - \frac{1}{\hbar^2}(\Delta_{\varphi(0)}H)^2 t^2 + \mathcal{O}(t^3)$$

gegeben ist!

c) Diskutieren Sie den Fall $\Delta_{\varphi(0)}H = 0$!

d) Benutzen Sie die in der Vorlesung für eine beliebige Observable A abgeleitete Formel

$$\Delta_{\varphi(t)}A \; \Delta_{\varphi(t)}H \geqslant \frac{\hbar}{2}\left|\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\varphi(t)}\right| ,$$

um zu zeigen, dass

$$\left|\frac{dp_{\text{verweil}}(t)}{dt}\right| \leqslant \frac{2}{\hbar}\Delta_{\varphi(t)}H \sqrt{p_{\text{verweil}}(t)(1 - p_{\text{verweil}}(t))} \,!$$

e) Begründen Sie, dass

$$p_{\text{verweil}}(t) \geqslant \cos^2\left(\frac{t\,\Delta_{\varphi(t)}H}{\hbar}\right) !$$

(Verallgemeinerung von b))

Aufgabe 31 — Berry-Krümmung
Es sei $H = H(\boldsymbol{B})$ ein Hamiltonian, der parametrisch von der Stärke eines externen Magnetfelds abhängt und

$$H(\boldsymbol{B})|n(\boldsymbol{B})\rangle = E_n(\boldsymbol{B})|n(\boldsymbol{B})\rangle$$

für eine ONB $\{|n(\boldsymbol{B})\rangle\}$ und nichtentartete Eigenwerte $E_n(\boldsymbol{B})$.

Der Berry-Zusammenhang ist durch

$$\boldsymbol{A}^{(n)}(\boldsymbol{B}) = i\langle n(\boldsymbol{B})|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{B}}|n(\boldsymbol{B})\rangle$$

gegeben und die Berry-Krümmung durch

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(n)}(\boldsymbol{B}) = \frac{\partial}{\partial B_\alpha}A_\beta^{(n)}(\boldsymbol{B}) - \frac{\partial}{\partial B_\beta}A_\alpha^{(n)}(\boldsymbol{B}) \ .$$

Hier ist $\alpha, \beta = x, y, z$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(n)}(\boldsymbol{B}) = i\left(\frac{\partial\langle n|}{\partial B_\alpha}\frac{\partial|n\rangle}{\partial B_\beta} - \frac{\partial\langle n|}{\partial B_\beta}\frac{\partial|n\rangle}{\partial B_\alpha}\right) \ !$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(n)}(\boldsymbol{B}) = i\sum_{m\neq n}\frac{\langle n(\boldsymbol{B})|\frac{\partial H(\boldsymbol{B})}{\partial B_\alpha}|m(\boldsymbol{B})\rangle\langle m(\boldsymbol{B})|\frac{\partial H(\boldsymbol{B})}{\partial B_\beta}|n(\boldsymbol{B})\rangle - (\alpha \leftrightarrow \beta)}{(E_n - E_m)^2}$$

Aufgabe 32 — Rotating wave approximation
Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System,

$$H_0 = -\frac{\hbar}{2}\Delta_0\sigma_z$$

mit $\Delta_0 = \text{const.}$, das an eine zeitlich oszillierende Störung

$$H_1(t) = -\mu E\sin(\omega t)\sigma_x$$

mit $\mu, E = \text{const.}$ gekoppelt ist.

a) Verwenden Sie zur Lösung der Schrödinger-Gleichung den Ansatz

$$|\varphi(t)\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t)e^{i\Delta_0 t/2} \\ c_2(t)e^{-i\Delta_0 t/2} \end{pmatrix} \ ,$$

und leiten Sie damit ein Differenzialgleichungssystem für $c_{1,2}(t)$ ab!

b) Drücken Sie die zeitabhängigen Koeffizienten durch Terme mit den Frequenzen $\omega + \Delta_0$ und $\omega - \Delta_0$ aus, und vernachlässigen Sie im Weiteren die Terme mit $\omega + \Delta_0$! Diese "rotating wave approximation" ist für $\omega \approx \Delta_0$ anwendbar.

Geben Sie so die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung an!

c) Berechnen Sie die zeitabängige Wahrscheinlichkeit dafür, das System im Zustand $(0,1)^T$ zu finden, falls es zur Zeit $t = 0$ im Zustand $(1,0)^T$ präpariert wurde! Für welche Zeiten und für welche Werte des "detunings" $\delta = \omega - \Delta_0$ ist die Wahrscheinlichkeit maximal?

Aufgabe 33 — Dirac-Frenkel-Variationsprinzip
Es sei $\{|n\rangle\}$ eine beliebige ONB von $\mathcal{H}$ und H der Hamilton-Operator eines Quantensystems. Durch

$$L(\{c_n(t), c_n^*(t), \dot{c}_n(t), \dot{c}_n^*(t)\}) = \langle\Psi(t)|(i\hbar\frac{d}{dt} - H)|\Psi(t)\rangle$$

mit

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$$

werde eine Funktion L definiert. Zeigen Sie, dass sich die Schrödinger-Gleichung für $|\Psi(t)\rangle$ in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{c}_n(t)} - \frac{\partial L}{\partial c_n(t)} = 0$$

bzw. in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{c}_n^*(t)} - \frac{\partial L}{\partial c_n^*(t)} = 0$$

ausdrücken lässt!