Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 25 — Eigenwerte
Für einen Operator A gelte $A^4 + A^2 = 0$. Welche Eigenwerte kann A im Allgemeinen besitzen?

Diskutieren Sie jetzt speziell auch den Fall

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}!$$

Aufgabe 26 — Dynamik durch wiederholtes Messen
Ein Spin-$1/2$-Quantensystem befinde sich im Zustand

$$|\Psi\rangle_{\text{ini}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Weiter sei

$$\hat{n}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsvektor und

$$\boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} .$$

Es werde jetzt eine Folge von $M+1$ Messungen direkt hintereinander ausgeführt: Im $k=0$-ten Schritt wird $\boldsymbol{S}\hat{n}(0)$ gemessen. Unabhängig vom Ausgang dieser Messung werde dann im $k=1$-ten Schritt $\boldsymbol{S}\hat{n}(\varphi = 1/(2M))$ gemessen. Im k-ten Schritt wird $\boldsymbol{S}\hat{n}(\varphi_k)$ gemessen mit

$$\varphi_k = \frac{k}{M}\frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, ..., M) .$$

a) Welchen Erwartungswert hat $\boldsymbol{S}$ im Zustand $|\Psi\rangle_{\text{ini}}$ und im Zustand

$$|\Psi\rangle_{\text{fin}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ?$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Quantensystem nach den $M+1$ Messungen im Zustand $|\Psi\rangle_{\text{fin}}$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man bei der $M+1$-ten Messung das Resultat $+\hbar/2$? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit konkret an für $M = 1, 2, 3$ und für $M \to \infty$!

d) In Abänderung des Experiments werde jetzt bei jeder Einzelmessung nur der Zustand zum Eigenwert $+\hbar/2$ als neuer Zustand für die nächste Messung beibehalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Quantensystem nach den $M+1$ Filter-Messungen im Zustand $|\Psi\rangle_{\text{fin}}$? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit konkret an für $M = 1, 2, 3$ und für $M \to \infty$!

Aufgabe 27 — Verschwindende Unbestimmtheit
Ein Quantensystem befinde sich in einem Zustand $|\varphi\rangle$, für den die Unbestimmtheit der Observablen A verschwindet:

$$\Delta_\varphi A = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass der Zustand $|\varphi\rangle$ ein Eigenzustand von A sein muss!

Aufgabe 28 — Variationsmethode
a) Es sei $|\varphi\rangle$ ein (nicht normierter) Vektor und H der Hamiltonian eines Quantensystems. Der Erwartungswert von H im Zustand $|\varphi\rangle$ ist

$$\langle H\rangle_\varphi = \frac{\langle\varphi|H|\varphi\rangle}{\langle\varphi|\varphi\rangle}\,.$$

Es sei $|\varphi_0\rangle$ ein Zustand, für den der Erwartungswert minimal ist. Zeigen Sie, dass dann

$$H|\varphi_0\rangle = E_0|\varphi_0\rangle$$

gilt, wobei E_0 die kleinste Eigenwert von H ist!

$|\varphi_0\rangle$ heißt Grundzustand und E_0 Grundzustandsenergie von H.

b) Gegeben ist ein "Testzustand" $|\varphi(\alpha)\rangle$, der von einem Parameter α abhängt. Begründen Sie, warum es Sinn macht, einen "optimalen" Wert α_0 für den Parameter durch

$$\frac{d\langle H\rangle_{\varphi(\alpha_{\mathrm{opt}})}}{d\alpha} \stackrel{!}{=} 0$$

festzulegen!

c) Betrachten Sie jetzt einen Hamiltonian, der in einer Darstellung durch die folgende 2×2-Matrix gegeben ist:

$$H = \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a-c \end{pmatrix}!$$

Hier sind a, b, c reelle Zahlen. Optimieren Sie den Testzustand

$$|\varphi(\alpha)\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}!$$

Aufgabe 29 — Spektralfunktion
Der Zustand eines Quantensystems werde durch $|\varphi(t)\rangle$ beschrieben. Für eine Orthonormalbasis $\{|n\rangle\}$ aus Eigenzuständen des zeitunabhängigen Hamiltonians sei weiter die Spektralfunktion

$$w(E) = \sum_n |\langle n|\varphi(0)|^2 \delta(E - E_n)$$

definiert.

a) Drücken Sie den Erwartungswert $\langle H\rangle_{\varphi(t)}$ und die Unbestimmtheit $\Delta_{\varphi(t)}H$ der Energie durch die Spektralfunktion aus!

b) Welche physikalische Bedeutung hat die Fourier-Transformierte der Spektralfunktion?

c) Zeigen Sie, dass

$$w(E) = \langle \delta(E - H) \rangle_{\varphi(0)} \text{ !}$$