Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 20 — Messprozess
Ein Spin-$1/2$-Quantensystem befinde sich im Zustand

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} .$$

Es werde die Observable $S_y = (\hbar/2)\sigma_y$ gemessen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von S_y im Zustand $|\Psi\rangle$!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Ergebnis $-\hbar/2$ zu bekommen?

c) In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung, falls $-\hbar/2$ gefunden wurde?

d) Mit welcher Gesamtwahrscheinlichkeit findet man $+\hbar/2$ bei einer Messung von S_z, die sich der Messung von S_y direkt anschließt? Beachten Sie bei dieser Frage, dass die vorangegangene Messung von S_y verschiedene Resultate ergeben kann!

Aufgabe 21 — Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation
a) Testen Sie die Unbestimmtheitsrelation von Heisenberg für die x- und die y-Komponente eines Spins $1/2$ in einem Eigenzustand der z-Komponente! Ist die Unbestimmtheitsrelation mit "$=$" oder mit "$>$" erfüllt?

b) Gilt die Unbestimmtheitsrelation für S_x und S_y auch im Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ?$$

Aufgabe 22 — Operatorprodukt
A sei hermitesch und besitze ein nichtentartetes Eigenwertspektrum.

a) Zeigen Sie, dass

$$\prod_n (A - a_n \mathbf{1}) = 0 \,!$$

b) Welche Bedeutung hat der Operator

$$R_n \equiv \prod_m^{m\neq n} \frac{A - a_m \mathbf{1}}{a_n - a_m} \;?$$

Aufgabe 23 — Inkompatible Obervable
Es seien A, B zwei Messgrößen, die in einer Darstellung durch die hermiteschen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

a) Berechnen Sie $[A, B]$!

b) 100 identische Quantensysteme werden jeweils im gleichen Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

präpariert. Es werde B für jedes System gemessen. Wie viele Messungen ergeben das Resultat $b = 0$, und wie viele ergeben $b = -1$?

c) Wie viele Systeme befinden sich nach einer Messung von A im Eigenzustand von A zum Eigenwert 1 bzw. -1?

d) Es werde jetzt für jedes System erst A und dann B gemessen. Bei wie vielen Systemen findet man das Resultat $b = 0$, bei wie vielen $b = -1$?

Aufgabe 24 — Hellmann-Feynman-Theorem
Sei $H = H(\lambda)$ ein Hamiltonian, der von einem reellen Parameter λ abhängt, und $|\varphi(\lambda)\rangle$ ein normierter Eigenzustand zum Eigenwert $E(\lambda)$:

$$H(\lambda)|\varphi(\lambda)\rangle = E(\lambda)|\varphi(\lambda)\rangle \, .$$

Beweisen Sie das Hellmann-Feynman-Theorem:

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = \langle\varphi(\lambda)|\frac{dH(\lambda)}{d\lambda}|\varphi(\lambda)\rangle \, !$$