Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 16 — Projektoren und Exponentialfunktion
a) P sei ein Projektor und $\lambda \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie

$$e^{\lambda P} \; !$$

b) Es sei jetzt P_n ein Satz von paarweise orthogonalen Projektoren und $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie zunächst, dass

$$e^{\sum_n \lambda_n P_n} = \prod_n (1 + (e^{\lambda_n} - 1)P_n) \; !$$

c) Führen Sie das Produkt aus, und zeigen Sie so, dass

$$e^{\sum_n \lambda_n P_n} = \sum_n e^{\lambda_n} P_n \; ,$$

falls $\sum_n P_n = 1$!

Aufgabe 17 — Kommutatoren
A und B seien hermitesche Operatoren.

a) Berechnen Sie $[A, B]^\dagger$!

b) Geben Sie eine Zahl c an, so dass $c[A, B]$ hermitesch ist!

c) $|\varphi\rangle$ sei ein Eigenzustand von A. Berechnen Sie $\langle\varphi|[A, B]|\varphi\rangle$!

d) A, B, C seien beliebige Operatoren. Zeigen Sie, dass

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \; , \qquad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \; !$$

e) Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Welche Eigenschaften haben diese Operatoren?

Kann man die Operatoren jeweils mit Konstanten c_1, c_2, c_3 multiplizieren, $A_i \mapsto c_i A_i$, so dass die resultierende Kommutator-Algebra identisch mit der Kommutator-Algebra der Operatoren S_x, S_y, S_z ist?

Aufgabe 18 — Pauli-Matrizen
a) Beweisen Sie, dass

$$(\boldsymbol{\sigma a}) \cdot (\boldsymbol{\sigma b}) = \boldsymbol{ab} + i\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \ ,$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen ist und $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ beliebige Vektoren!

b) Zeigen Sie, dass sich jede 2×2-Matrix A in die 4 Basis-Matrizen $\mathbf{1}$ und $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ entwickeln lässt:

$$A = \lambda_0 \mathbf{1} + \sum_{i=x,y,z} \lambda_i \sigma_i \ ,$$

und dass sich die Koeffizienten durch

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \,\mathsf{Sp}\, A \ , \qquad \lambda_i = \frac{1}{2} \,\mathsf{Sp}\, (\sigma_i A)$$

ausdrücken lassen!

Aufgabe 19 — Rotationsmatrix für Spin $1/2$
Durch

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

ist ein Einheitsvektor $\hat{n}$ gegeben. Die Matrix für den Basiswechsel

$$\{|\pm, \hat{z}\rangle\} \ \mapsto \ \{|\pm, \hat{n}\rangle\}$$

ist dann:

$$D^{(1/2)}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) & -\sin(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) e^{i\varphi} & \cos(\vartheta/2) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \ ,$$

also die Rotationsmatrix für Spin-$1/2$.

a) Zeigen Sie, dass $(\hat{n}\boldsymbol{\sigma})^2 = 1$, wobei $\boldsymbol{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen ist!

b) Zeigen Sie, dass

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha \boldsymbol{S}\hat{n}} = \cos(\alpha/2)\mathbf{1} - i\sin(\alpha/2)\boldsymbol{\sigma}\hat{n}$$

für $\boldsymbol{S} = (\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ und beliebiges reelles α!

c) Zeigen Sie, dass die Rotationsmatrix für Spin-$1/2$, bis auf einen globalen Phasenfaktor, durch

$$D^{(1/2)}(\vartheta, \varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi \boldsymbol{S}\hat{z}} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\vartheta \boldsymbol{S}\hat{y}}$$

gegeben ist!

d) Interpretieren Sie dieses Resultat als Hintereinanderausführung von Drehungen!