Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 10 — Kommutatoren und entartete Eigenwerte
A, B, C seien hermitesche Operatoren und

$$[A, B] = 0 \,, \qquad [A, C] = 0 \,, \qquad [B, C] \neq 0 \,.$$

Zeigen Sie, dass A wenigstens einen entarteten Eigenwert besitzt!

Aufgabe 11 — Sp ln = ln det
A sei ein hermitescher Operator. Zeigen Sie, dass

$$\text{Sp } \ln A = \ln \det A \qquad \text{und} \quad e^{\mathrm{Sp} A} = \det e^{A} \quad !$$

Aufgabe 12 — Baker-Campbell-Hausdorff-Formel
a) Zwei Operatoren seien durch $N \times N$-Matrizen A und B dargestellt. Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung, dass

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \frac{\lambda}{1!}[A, B] + \frac{\lambda^2}{2!}[A, [A, B]] + \cdots !$$

b) Betrachten Sie als Beispiel Operatoren A, B, C, für die die Kommutator-Relationen

$$[A, B] = iC \,, [B, C] = iA \,, [C, A] = iB$$

gelten (Kommutator-Relationen für den Drehimpuls). Begründen Sie, dass dann

$$e^{iAt} B e^{-iAt} = B \cos t - C \sin t \,!$$

Aufgabe 13 — Operatoren und Exponentialfunktion
A und B seien Operatoren bzw. Matrizen. Nehmen Sie an, dass sowohl A als auch B jeweils mit $[A, B]$ kommutieren, und zeigen Sie für diesen Fall, dass

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B} e^{-[A,B]/2}$$

und dass

$$e^{A} e^{B} = e^{B} e^{A} e^{[A,B]} \,!$$

Hinweis: Leiten Sie eine Differenzialgleichung für die Funktion

$$g(t) = e^{At} e^{Bt}$$

ab!

Aufgabe 14 — Diagonalisierung
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Geben Sie die Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Entartungsgrade an! Sind die Eigenwerte reell?

b) Geben Sie eine ONB aus Eigenvektoren an! Ist die Basis eindeutig?

c) Konstruieren Sie eine hermitesche Matrix B so, dass $[A, B] = 0$ und dass B dieselben Eigenvektoren wie A besitzt aber die Eigenwerte $b_1 = 0$ (3-fach entartet) und $b_2 = 1$ (nicht-entartet)!

Aufgabe 15 — Normale Matrizen
C sei eine normale Matrix, d.h. eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft

$$CC^\dagger = C^\dagger C .$$

Zeigen Sie, dass C diagonalisierbar ist, dass also eine ONB aus Eigenvektoren von C existiert!