Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 6 — Projektor als Summe dyadischer Produkte
$\mathcal{H}_1$ sei ein Unterraum von $\mathcal{H}$ mit einer ONB $\{|n\rangle\}$ $(n = 1, ..., M < N = \dim \mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{P} = \sum_{n=1}^{M} |n\rangle\langle n|$$

der Projektor auf $\mathcal{H}_1$ ist, d.h.

a) $\mathcal{P}$ ist hermitesch und idempotent,

b) $\mathcal{P}|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ für $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$,

c) $\mathcal{P}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ für $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$!

Aufgabe 7 — Hinreichende Bedingung für Nulloperator
Für einen (nicht notwendig hermiteschen) Operator A gelte

$$\langle\phi|A|\phi\rangle = 0 \qquad \text{für alle} \quad |\phi\rangle \in \mathcal{H} \,.$$

Zeigen Sie, dass dann $A = 0$ ist!

Hinweis: Betrachten Sie zunächst hermitesche Operatoren, und nutzen Sie die Spektralzerlegung. Zeigen Sie für den allgemeinen Fall zunächst $\langle\phi|A^\dagger|\phi\rangle = 0$ und konstruieren Sie hermitesche Operatoren aus A und $A^\dagger$.

Aufgabe 8 — Nicht-negativer Operator
Ein Operator A heißt nicht-negativ, falls für alle $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$:

$$\langle\phi|A|\phi\rangle \geq 0 \,.$$

a) A sei nicht-negativ. Zeigen Sie, dass A hermitesch ist!

b) Zeigen Sie, dass ein Operator genau dann nicht-negativ ist, wenn sämtliche seiner Eigenwerte nicht-negativ sind!

c) Betrachten Sie einen reellen Vektorraum, und zeigen Sie für diesen Fall, dass nicht-negative Operatoren nicht notwendig hermitesch (d.h., im Falle von reellen Vektorräumen, symmetrisch) sind!

Aufgabe 9 — Hermitesche 2×2-Matrix
Für $\theta, \delta \in [0, 2\pi]$ ist eine hermitesche 2×2-Matrix durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{i\delta} \\ \sin\theta e^{-i\delta} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A!

b) Berechnen Sie A^2 und $e^{\lambda A} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda A)^k / k!$ für beliebiges λ!

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von A!

d) Es sei

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) e^{-i\delta} \end{pmatrix} , \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) e^{-i\delta} \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass χ_+ und χ_- orthogonal sind!

e) Zeigen Sie, dass $\chi_\pm$ Eigenvektoren von A sind!

f) Es sei jetzt

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a' \end{pmatrix} .$$

mit reellen a, a' eine beliebige hermitesche 2×2-Matrix.

Zeigen Sie, dass sich A in die Form

$$A = \frac{a + a'}{2} + \sqrt{\frac{(a - a')^2}{4} + |b|^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{i\delta} \\ \sin\theta e^{-i\delta} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

bringen lässt, und geben Sie Bestimmungsgleichungen für θ und δ an!

g) Geben Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A an!