Übungen zur Theoretischen Physik II (Quantenmechanik)

Aufgabe 1 — Hermitesch konjugierter Operator
A sei ein linearer Operator auf einem dreidimensionalen Hilbert-Raum, und $\{|n\rangle\}$ eine Orthonormalbasis. Es gelte:

$$\begin{aligned} A|1\rangle &= i|2\rangle - |3\rangle \,, \\ A|2\rangle &= -i|1\rangle + |2\rangle \,, \\ A|3\rangle &= -|1\rangle \,. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie $A^\dagger|1\rangle$!

b) Durch welche Matrix wird A bzgl. der gegebenen Basis dargestellt?

c) Durch welche Matrix wird $A^\dagger$ dargestellt?

d) Zeigen Sie ganz allgemein für einen beliebigen (linearen) Operator B, dass der hermitesch konjugierte Operator $B^\dagger$ durch die hermitesch konjugierte Matrix dargestellt wird:

$$(B^\dagger)_{mn} = B^*_{nm} \;!$$

Aufgabe 2 — Basiswechsel
$\{|n\rangle\}$ sei eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Hilbert-Raums. Durch

$$\begin{aligned} |1\rangle' &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \,, \\ |2\rangle' &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \,, \\ |3\rangle' &= i|3\rangle \,, \end{aligned}$$

wird ein neuer Satz von Vektoren $\{|n\rangle'\}$ definiert.

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle m'|n'\rangle$! Ist $\{|n\rangle'\}$ eine Orthonormalbasis?

b) Durch Entwicklung der "neuen" Zustände $|n'\rangle$ in die "alte" Orthonormalbasis $\{|n\rangle\}$ wird eine Matrix $U_{nn'}$ definiert:

$$|n'\rangle = \sum_n U_{nn'}|n\rangle \,.$$

Berechnen Sie die Matrixelemente!

c) Zeigen Sie, dass die Matrix unitär ist, dass also

$$U^{-1}_{n'n} = U^{\dagger}_{n'n}\ !$$

Aufgabe 3 — Projektoren
$\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}'_1$ seien Projektoren auf die Unterräume $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}'_1$.

a) Zeigen Sie: $\mathcal{P}_1\mathcal{P}'_1$ ist genau dann ein Projektor, wenn $\mathcal{P}_1\mathcal{P}'_1 = \mathcal{P}'_1\mathcal{P}_1$. In diesem Fall projiziert $\mathcal{P}_1\mathcal{P}'_1$ auf die Schnitt $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}'_1$.

b) Zeigen Sie: $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}'_1$ ist ein Projektor, wenn $\mathcal{P}_1\mathcal{P}'_1 = 0$. In diesem Fall sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}'_1$ orthogonal, und $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}'_1$ projiziert auf die direkte Summe $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}'_1$. (Bemerkung: $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}'_1 = \{|\phi_1\rangle + |\phi'_1\rangle \,|\, |\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\phi'_1\rangle \in \mathcal{H}'_1\}$.)

Aufgabe 4 — Projektionstheorem
Es sei $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, und $\mathcal{H}_1$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$.

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges Element $|\phi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ existiert mit der Eigenschaft $||\phi_1 - \phi|| =$ min.!
b) Geben Sie $|\phi_1\rangle$ an!

Aufgabe 5 — Spur eines Operators
Die Spur eines Operators A ist definiert als die Summe der Diagonalelemente der darstellenden Matrix (bezüglich einer Basis):

$$\text{Sp}\, A = \sum_n A_{nn}\ .$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\text{Sp}\,(AB) = \text{Sp}\,(BA)$$

für zwei Operatoren A und B!

b) Zeigen Sie, dass die Definition der Spur unabhängig von der Wahl der Basis ist!

c) Zeigen Sie, dass

$$\text{Sp}\,(ABC) = \text{Sp}\,(BCA) = \text{Sp}\,(CAB)$$

(zyklische Invarianz der Spur)!