Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 34 — Zeitentwicklungsoperator
Die Taylor-Formel für eine Funktion $f(x)$ lautet:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \ ,$$

wobei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f an der Stelle x bezeichnet.

Für einen Operator $\hat{A}$ definiert man:

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \hat{A}^n \ .$$

Mit $\hat{A}^n$ ist hier die n-fache Hintereinanderausführung von $\hat{A}$ gemeint.

a) Geben Sie mit Hilfe der Taylor-Formel einen Ausdruck für $e^{\hat{A}}$ an, und berechnen Sie

$$[\hat{A}, e^{\hat{A}}] \quad !$$

b) $\hat{H}$ sei der Hamilton-Operator. Man definiert den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ durch

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \ .$$

Berechnen Sie die Ableitung $dU(t)/dt$!

c) Zeigen Sie, dass

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle$$

eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist!

d) Bestimmen Sie $\hat{U}(t)^\dagger$, d.h. den adjungierten Operator zu $\hat{U}(t)$!

e) Für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$$

nur falls $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Zeigen Sie damit, dass $\hat{U}(t)$ ein unitärer Operator ist!

Aufgabe 35 — Translationsoperator
Der Impulsoperator

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

erzeugt eine infinitesimale Translation in x-Richtung. Zeigen Sie, dass der Operator

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x\right)$$

eine (endliche) Translation in x-Richtung um den Betrag a erzeugt, indem Sie

$$\hat{T}\Psi(x)$$

für eine beliebige Wellenfunktion $\Psi(x)$ berechnen!

Aufgabe 36 — Kugelflächenfunktionen
In Kugelkoordinaten ist das Quadrat des Bahndrehimpulsoperators durch

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$

gegeben.

Spezialisieren Sie die allgemeine Formel für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ auf $l = 1$ und $m = 1$, um zu zeigen, dass

$$Y_{11}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{i\varphi}$$

ist, und berechnen Sie

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 Y_{11}(\vartheta, \varphi) \qquad !$$

Interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 37 — Wasserstoffatom
Das Elektron des Wasserstoffatoms befinde sich im Zustand

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = A\,\frac{e^{-\alpha r}}{r} \cos\vartheta\, e^{-i\varphi} \ .$$

A und $\alpha > 0$ sind Konstanten.

Berechnen Sie den Normierungsfaktor, und beachten Sie dabei, dass das infinitesimale Volumenelement in Kugelkoordinaten durch

$$d^3r = r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

gegeben ist!

Aufgabe 38 — Auf- und Absteigeoperatoren
$\hat{\boldsymbol{J}}$ sei ein Drehimpulsoperator, d.h. es gelten die üblichen Vertauschungsrelationen für dessen Komponenten, z.B.:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z \ .$$

Durch

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \ , \ \hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$$

sind der sogenannte Aufsteige- und der Absteigeoperator definiert. $\hat{J}_+$ und $\hat{J}_-$ sind nicht hermetisch und beschreiben somit keine Messgrößen.

a) Zeigen Sie, dass

$$[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hbar \hat{J}_+ \qquad !$$

Wie lautet die analoge Vertauschungsrelation für $\hat{J}_-$?

b) Zeigen Sie, dass

$$[\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_+] = [\hat{\boldsymbol{J}}^2, \hat{J}_-] = 0 \qquad !$$

c) Gegeben ist ein Eigenzustand $|j, m\rangle$ von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ zu den Eigenwerten $\hbar^2 j(j+1)$ bzw. $\hbar m$. Zeigen Sie, dass $\hat{J}_+|j, m\rangle$ ebenfalls ein Eigenzustand von $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ und $\hat{J}_z$ ist, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte!

Was gilt für $\hat{J}_-|j, m\rangle$?