

Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 28 — Drehimpulserwartungswert

Ein Quantensystem sei in einem Eigenzustand von \hat{L}_x . Bestimmen Sie den Erwartungswert von \hat{L}_y !

Aufgabe 29 — Elektronenspin im Magnetfeld

Betrachten Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

für den Spinzustand eines Elektrons. Befindet sich der Spin in einem äußeren Magnetfeld \mathbf{B} , so lautet der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -g\mu_B \frac{1}{\hbar} \mathbf{B} \mathbf{S}.$$

Hier ist $g = 2$ der Landé-Faktor und $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ das Bohr'sche Magneton (e : Elementarladung, m_e : Elektronenmasse).

a) Nehmen Sie an, dass zur Zeit $t = 0$

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten a_0 und b_0 , und lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für den Fall, dass das Magnetfeld in z -Richtung zeigt, $\mathbf{B} = B_z \mathbf{e}_z$.

b) Eine Messung von \hat{S}_x zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Resultat $+\hbar/2$ ergeben. Wie müssen also a_0 und b_0 gewählt werden? Normieren Sie den Zustand für $t = 0$ auf Eins!

c) Berechnen Sie jetzt die Norm des Zustands für beliebige Zeiten t !

d) Berechnen Sie den Erwartungswert von \hat{S}_x und von \hat{S}_y zur Zeit t ! Skizzieren Sie die Zeitabhängigkeit des Vektors $\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$!

e) Berechnen Sie die Unschärfen ΔS_x und ΔS_y ! Wann ist $\Delta S_x = 0$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine Messung von \hat{S}_x zur Zeit $t_1 = \pi\hbar/(2\mu_B B_z)$ den Wert $-\hbar/2$?

f) Ist die Heisenbergsche Unschärferelation stets erfüllt?

Aufgabe 30 — Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen

Listen Sie alle Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ für $l = 0, l = 1, l = 2$ auf (z.B. wiki ...) und zeigen Sie, dass diese paarweise orthogonal sind!

Hinweis: Begründen und beachten Sie bei der Berechnung des Skalarprodukts den zusätzlichen Faktor $\sin \vartheta$:

$$\langle \Psi_1(\vartheta, \varphi) | \Psi_2(\vartheta, \varphi) \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \Psi_1^*(\vartheta, \varphi) \Psi_2(\vartheta, \varphi)$$

Es handelt sich um insgesamt 9 verschiedene Kugelflächenfunktionen, und somit sind 36 verschiedene Paare zu diskutieren. Versuchen Sie, einen möglichst effizienten Weg zu finden!