

## Übungen zur Theoretischen Physik A

### Aufgabe 19 — Impulsoperator

Der Impuls  $p_x$  ist eine Observable und sollte daher durch einen hermiteschen Operator  $\hat{p}_x$  dargestellt werden. Prüfen Sie, ob

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

tatsächlich hermitesch ist!

### Aufgabe 20 — Eigenwerte von Operatoren

a) Gegeben sei ein Operator  $\hat{P}$  mit den Eigenschaften

$$\hat{P}^\dagger = \hat{P} \quad \text{und} \quad \hat{P}^2 = \hat{P}.$$

Bestimmen Sie seine möglichen Eigenwerte!

b) Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte des hermiteschen Operators  $\hat{P}$  mit der Eigenschaft

$$\hat{P}^2 = \hat{1}.$$

c) Konstruieren Sie für die Fälle a) und b) jeweils  $2 \times 2$ -Matrizen mit denselben Eigenschaften!

### Aufgabe 21 — Quantenmechanik mit $2 \times 2$ -Matrizen - Spin

Der Spin eines Teilchens

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix}$$

ist eine Messgröße, deren  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Komponenten durch die Operatoren (Matrizen)

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

a) Ist  $\hat{\mathbf{S}}$  hermetisch, d.h. sind die drei Komponenten von  $\hat{\mathbf{S}}$  hermitesch?

b) Welche Eigenwerte haben die Komponenten des Spins?

c) Sind  $\hat{S}_x$  und  $\hat{S}_y$  kompatibel? Berechnen Sie den Kommutator!

Was gilt für  $\hat{S}_y$  und  $\hat{S}_z$ ?

Sind  $\hat{S}_z$  und  $\hat{S}_x$  gleichzeitig scharf messbar?

d) Wie lautet die Heisenbergsche Unschärferelation für  $\hat{S}_y$  und  $\hat{S}_z$ ?

e) Gegeben ist der Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Unschärfen  $\Delta\hat{S}_y$  und  $\Delta\hat{S}_z$  im Zustand  $|\Psi\rangle$ !  
Ist die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt?

f) Berechnen Sie  $\hat{S}^2 = \hat{S} \cdot \hat{S}$ !

Sind  $\hat{S}^2$  und  $\hat{S}_z$  kompatible Observable?

g) Geben Sie, falls möglich, einen vollständigen Satz gemeinsamer Eigenzustände von  $\hat{S}^2$  und  $\hat{S}_x$  an!