Übungen zur Theoretischen Physik A

Aufgabe 6 — Linear unabhängige Funktionen
Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ heißen linear unabhängig, falls für beliebige Zahlen α und β aus $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ (für alle x) folgt, dass $\alpha = 0, \beta = 0$.

Allgemein heißt ein Satz von Funktionen $f_1(x), ..., f_n(x)$ linear unabhängig, falls für beliebige Zahlen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = 0$ (für alle x) folgt, dass $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Untersuchen Sie die folgenden Sätze von Funktionen auf lineare Unabhängigkeit:

a) $3x - 1, x - 1/3$

b) $\sin(x), \cos(x), e^{ix}$

c) e^{ix}, e^{-ix}

d) $1, x, x^2, x^3$!

Aufgabe 7 — Lineare Differenzialgleichungen
a) Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - 3\frac{d}{dx} f(x) + 2f(x) = 0 \ .$$

Charakterisieren Sie diese DGL (gewöhnlich?, Ordnung?, linear?, konstante Koeffizienten?, homogen?) und geben Sie die allgemeine Lösung an!

b) Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - 2\frac{d}{dx} f(x) + 2f(x) = 0 \ .$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an!

c) Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) - 2\frac{d}{dx} f(x) + f(x) = 0 \ .$$

Gehen Sie standardmäßig vor und gewinnen Sie auf diese Weise zunächst eine Lösung $f_1(x)$. Zeigen Sie, dass $f_2(x) = x f_1(x)$ eine weitere Lösung ist!

d) Betrachten Sie die inhomogene DGL

$$\frac{d}{dx} f(x) - 2f(x) = 1 \ .$$

Versuchen Sie eine Lösung durch Raten zu finden! Versuchen Sie evtl. als Ansatz ein einfaches Polynom mit niedrigem Grad!

e) Betrachten Sie jetzt das zu d) zugehörige *homogene* Problem

$$\frac{d}{dx}f(x) - 2f(x) = 0$$

und geben Sie die allgemeine Lösung an!

Zeigen Sie, dass $f(x) = f_{\text{inhom}}(x) + f_{\text{hom}}(x)$ eine Lösung des inhomogenen Problems in d) ist, wobei $f_{\text{inhom}}(x)$ die spezielle Lösung aus d) und f_{hom} die allgemeine Lösung des homogenen Problems aus e) sind!

Aufgabe 8 — Kontinuitätsgleichung

Betrachten Sie die Schrödinger-Gleichung in drei Raumdimensionen,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r},t) ,$$

und leiten Sie daraus die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

ab, wobei

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte und

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\hbar}{2im}\Big(\Psi(\boldsymbol{r},t)^*\nabla\Psi(\boldsymbol{r},t) - \Psi(\boldsymbol{r},t)\nabla\Psi(\boldsymbol{r},t)^*\Big)$$

die Wahrscheinlichkeitsstromdichte sind! Gehen Sie dabei analog zum eindimensionalen Fall vor!