

Übungen zur Vielteilchentheorie

Aufgabe 16 — Vakuumfluktuationen

Geben Sie eine physikalische Observable (in zweiter Quantisierung) an, deren Vakuum Erwartungswert verschwindet ($\langle A \rangle_v = \langle 0|A|0 \rangle = 0$), die aber eine endliche Fluktuation

$$\langle (A - \langle A \rangle_v)^2 \rangle_v > 0$$

im Vakuumzustand aufweist!

Aufgabe 17 — Wick-Theorem

Betrachten Sie ein System von Spin-1/2-Fermionen. Die Ein-Teilchen-ONB ist $\{|\alpha\rangle\} = \{|i\sigma\rangle\}$. Berechnen Sie für $i \neq j$ die freien Erwartungswerte

$$\langle n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} \rangle^{(0)} \quad \langle n_{i\uparrow} n_{j\uparrow} \rangle^{(0)} \quad \langle n_{i\uparrow} n_{j\downarrow} \rangle^{(0)} \quad \langle n_{i\sigma} n_{j\sigma'} n_{j\sigma''} \rangle^{(0)}$$

mit Hilfe des Wick-Theorems! Nehmen Sie dabei an, dass die Gesamtteilchenzahl und der Gesamtspin erhalten sind ($[\hat{N}, H_0]_- = 0$, $[S_z, H_0]_- = 0$)!

Aufgabe 18 — Zwei-Niveau-Systeme

Gegeben ist ein System aus N unterscheidbaren Teilchen, bei dem der Ein-Teilchen-Hilbert-Raum jedes Teilchens zweidimensional ist. Betrachten Sie die Abbildung auf ein System von identischen Fermionen, und zeigen Sie, dass der Hilbert-Raum des Systems unterscheidbarer Teilchen die gleiche Dimension besitzt wie der Hilbert-Raum des Fermi-Systems!

Aufgabe 19 — Kohärente Zustände

Gegeben ist ein System von Bosonen. Ein kohärenter Zustand $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}^{(+)}$ ist ein gemeinsamer Eigenzustand aller Vernichter c_α :

$$c_\alpha |\varphi\rangle = \varphi_\alpha |\varphi\rangle$$

für $\alpha = 1, \dots, d$ ($d = \dim \mathcal{H}_1$). Er kann daher durch die Eigenwerte $\varphi_\alpha \in \mathbb{C}$ charakterisiert werden.

a) Die Eigenwerte φ_α seien für $\alpha = 1, \dots, d$ gegeben. Bestimmen Sie den zugehörigen kohärenten Zustand

$$|\varphi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_d} \varphi_{n_1, \dots, n_d} |n_1, \dots, n_d\rangle^{(+)},$$

indem Sie die Koeffizienten $\varphi_{n_1, \dots, n_d}$ berechnen!

(Hinweis 1: Leiten Sie aus der Eigenwertgleichung eine Gleichung für die Koeffizienten ab! Hinweis 2: Durch wiederholtes Anwenden von c_α erhält man letztlich den Vakuumzustand).

b) Normieren Sie den kohärenten Zustand!

c) Gibt es kohärente Zustände auch für Fermionen?