Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 19 — Zerlegung der Eins
Beweisen Sie die folgende Darstellung der Eins mit kohähenten Zuständen $|\xi\rangle$ für ein System von Fermionen:

$$\mathbf{1} = \int \left(\prod_\alpha d\xi^*_\alpha \xi_\alpha \right) e^{-\sum_\alpha \xi^*_\alpha \xi_\alpha} |\xi\rangle\langle\xi| \ ,$$

indem Sie ein beliebiges Matrixelement $\langle n'_1, ..., n'_K|\mathbf{1}|n_1, ..., n_K\rangle$ durch direktes Ausführen der Integration berechnen!

Aufgabe 20 — Darstellung durch kohärente Zustände
Mittels kohärenter Zustände kann ein beliebiger Zustand $|\Psi\rangle$ durch eine "Wellenfunktion"

$$\Psi(\xi^*_1, ..., \xi^*_K) = \langle \xi_1, ..., \xi_K|\Psi\rangle = \langle 0|e^{-\sum_\alpha c_\alpha \xi^*_\alpha}|\Psi\rangle$$

dargestellt werden.

Zeigen Sie, dass die Wirkung von c_α und $c^\dagger_\alpha$ auf Wellenfunktionen durch

$$c_\alpha \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \xi^*_\alpha} \ , \qquad c^\dagger_\alpha \leftrightarrow \xi^*_\alpha$$

gegeben ist!

Aufgabe 21 — Kettenregel
Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ eine analytische Funktion und $f'(z) = (d/dz)f(z)$. Weiter sei $g : \mathcal{A}_- \to \mathcal{A}_+$, $\xi \mapsto g(\xi)$ eine gerade Funktion einer (ungeraden) Grassmann-Variable ξ. Zeigen Sie die Gültigkeit der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(g(\xi)) = \frac{\partial}{\partial \xi} g(\xi) \cdot f'(g(\xi))\Big|_{\xi=0} \ !$$

Aufgabe 22 — Ein-Teilchen-Matsubara-Funktion

$$\Omega[J^*_\alpha(\tau), J_\alpha(\tau)] = -T \ln \int \mathcal{D}[\xi^*_\alpha(\tau), \xi_\alpha(\tau)] e^{-S[\xi^*_\alpha(\tau), \xi_\alpha(\tau), J^*_\alpha(\tau), J_\alpha(\tau)]}$$

sei das großkanonische Potenzial eines Systems identischer Teilchen mit der Wirkung $S = S[\xi_\alpha^*(\tau), \xi_\alpha(\tau), J_\alpha^*(\tau), J_\alpha(\tau)]$,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\beta d\tau \left[\sum_\alpha \xi_\alpha^*(\tau)(\partial_\tau - \mu)\xi_\alpha(\tau) + H[\xi_\alpha^*(\tau), \xi_\alpha(\tau)] \right] \\ &+ \int_0^\beta d\tau \sum_\alpha (J_\alpha^*(\tau)\xi_\alpha(\tau) + \xi_\alpha^*(\tau) J_\alpha(\tau)) \ , \end{aligned}$$

wobei $J_\alpha^*(\tau), J_\alpha(\tau)$ äußere zeitabhängige Quellen sind.

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{T}\frac{\delta^2\Omega}{\delta J_\beta(\tau')\delta J_\alpha^*(\tau)}\bigg|_{J^*=J=0} = \langle \xi_\alpha(\tau)\rangle\langle\xi_\beta^*(\tau')\rangle - \langle \xi_\alpha(\tau)\xi_\beta^*(\tau')\rangle = G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$$

für Bosonen ($J^*, J \in \mathbb{C}$) und Fermionen ($J^*, J \in \mathcal{A}_-$)!

Aufgabe 23 — Freie Ein-Teilchen-Matsubara-Funktion

Betrachten Sie ein wechselwirkungsfreies System von Bosonen oder Fermionen mit Hamilton-Operator

$$H_0 = \sum_m \epsilon_m c_m^\dagger c_m$$

und berechnen Sie die freie erzeugende Funktion

$$\mathcal{G}^{(0)}[J_m^*(\tau), J_m(\tau')] = \left\langle e^{-\int_0^\beta d\tau \sum_m (J_m^*(\tau)\xi_m(\tau) + \xi_m^*(\tau)J_m(\tau))} \right\rangle_{S^{(0)}}$$

für die freie Wirkung

$$S^{(0)}[\xi_m^*(\tau), \xi_m(\tau)] = \int_0^\beta d\tau \sum_m \xi_m^*(\tau)(\partial_\tau - \mu + \epsilon_m)\xi_m(\tau) = \sum_{rr'}\sum_m \xi_{m,r}^* S_{rr'}^{(m)} \xi_{m,r'}$$

durch direktes Ausführen des auftretenden Gauß-Integrals nach der üblichen τ-Diskretisierung ($\tau = r\beta/M$ und $\tau' = r'\beta/M$ und $M \to \infty$)!

Nutzen Sie das in diskreter Darstellung gegebene Ergebnis, um die freie Matsubara-Funktion aus der freien erzeugenden Funktion durch

$$-G_m^{(0)}(\tau - \tau') = \frac{\partial^2 \mathcal{G}^{(0)}[J_{m,r}^*, J_{m,r'}]}{\partial J_{m,r'}\partial J_{m,r}^*}\bigg|_{J^*=J=0}$$

zu bestimmen, und zeigen Sie, dass

$$-G_m^{(0)}(\tau - \tau') = \lim_{M\to\infty} {S_{rr'}^{(m)}}^{-1}$$

Geben Sie die Matrix $S^{(m)}$ explizit an, führen Sie die Matrixinversion durch und bilden Sie am Ende der Rechnung den Limes $M \to \infty$!