Übungen zur Quantentheorie der Vielteilchensysteme

Aufgabe 1 — Gauß-Integrale
Berechnen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2} \; !$$

A mit den Elementen A_{rs} sei eine symmetrische, reelle und positive definite $n \times n$-Matrix und J ein n-dimensionaler Vektor mit Elementen J_k. Zeigen Sie, dass

$$\int dx_1 \cdots dx_n\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{rs} x_r A_{rs} x_s + \sum_r J_r x_r} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{|\det A|^{1/2}}\, e^{\frac{1}{2}\sum_{rs} J_r A^{-1}_{rs} J_s} \; !$$

Was gilt im Falle komplexer J_k?

Aufgabe 2 — Normalordnung
Zeigen Sie für beliebige Operatoren $A = A(p,x)$ und $B = B(p,x)$, dass

$$: e^{A+B} :=: e^A e^B : \; !$$

Aufgabe 3 — Zweite Ableitungen des großkanonischen Potenzials
Es sei

$$H = H_0 + \lambda_A A + \lambda_B B$$

mit reellen Parametern λ_A und λ_B und Operatoren $A = A(\boldsymbol{r})$ und $B = B(\boldsymbol{r})$. Für $\Omega = -T \ln \mathsf{Sp} \exp(-\beta H)$ gilt (s. Vorlesung):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_A} = \langle A \rangle \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_B} = \langle B \rangle \; .$$

Nutzen Sie die Pfadintegraldarstellung der Zustandssumme $Z = \mathsf{Sp} \exp(-\beta H)$,

$$Z = \int D[\boldsymbol{r}(\tau)] \exp\left(- \int_0^\beta d\tau H[\boldsymbol{r}(\tau)] \right) \; ,$$

um die zweiten Ableitungen zu berechnen:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda_A\partial\lambda_B} = \frac{\partial\langle A\rangle}{\partial\lambda_B} = \beta\langle A\rangle\langle B\rangle - \int_0^\beta d\tau\langle B(\tau)A(0)\rangle\ !$$

$A(\tau)$ ist hier der Operator A in modifizierter Heisenberg-Darstellung:

$$A(\tau) = e^{H\tau}Ae^{-H\tau}\ .$$

Aufgabe 4 — Ununterscheidbarkeitsprinzip

Zeigen Sie, wie aus dem Prinzip der Ununterscheidbarkeit identischer Teilchen folgt, dass

- jede physikalische Observable unter Teilchenpermutationen invariant ist:
  $A = \mathcal{P}^\dagger A\mathcal{P}$ bzw. $[A,\mathcal{P}]_- = 0$,
- und jeder physikalische Zustand symmetrisch oder antisymmetrisch unter Teilchenpermutationen ist: $\mathcal{P}|\Psi\rangle = (\pm 1)^p|\Psi\rangle$!

$\mathcal{P}$ ist der Teilchenpermutationsoperator.

Aufgabe 5 — (Anti-)Symmetrisierungsoperator

Beweisen Sie die Eigenschaften

- $\mathcal{P}S_N^{(\epsilon)} = \epsilon^{\mathcal{P}}S_N^{(\epsilon)}$
- $(S_N^{(\epsilon)})^2 = S_N^{(\epsilon)}$ (Idempotenz)
- $(S_N^{(\epsilon)})^\dagger = S_N^{(\epsilon)}$ (Hermitizität)
- $S_N^{(+)}S_N^{(-)} = S_N^{(-)}S_N^{(+)} = 0$!

des (Anti-)Symmetrisierungsoperators $S_N^{(\epsilon)} = \frac{1}{N!}\sum_{\mathcal{P}}\epsilon^{\mathcal{P}}\mathcal{P}$

($\epsilon = +1$ für Bosonen, $\epsilon = -1$ für Fermionen)!

Zeigen Sie, dass $S_N^{(0)} = \mathbf{1} - S_N^{(+)} - S_N^{(-)}$ ein zu $S_N^{(\epsilon)}$ orthogonaler Projektor ist!