

Übungen zur Quantenmechanik II

Aufgabe 29 — Zeitunabhängige Störungstheorie

Testen Sie die Konzepte der zeitunabhängigen Störungstheorie an einem einfachen Modellsystem, für das der Hilbert-Raum zweidimensional ist! Der Hamilton-Operator $H = H_0 + H_1$ sei wie üblich in einen freien Term und einen Störterm zerlegt. In der zur Eigenbasis von H_0 gehörigen Darstellung ist:

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie zunächst das zu H gehörige Eigenwertproblem exakt, und berechnen Sie insbesondere die Eigenwerte von H !
- Führen Sie einen Kopplungsparameter ein, $H_1 \rightarrow \lambda H_1$, und entwickeln Sie die Eigenenergien in Potenzen von λ bis (einschließlich) zur Ordnung λ^2 !
- Vergleichen Sie mit dem Resultat der Schrödingerschen Störungstheorie zweiter Ordnung für $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ (keine Entartung) bzw. erster Ordnung für $\epsilon_1 = \epsilon_2$ (Entartung)!
- Berechnen Sie die Energiekorrektur im Rahmen der Brillouin-Wigner-Störungstheorie in *beliebiger* Ordnung! Summieren Sie über alle Ordnungen, um das exakte Resultat aus a) zu reproduzieren!

Aufgabe 30 — Störungstheorie: Anwendung auf das He-Atom

Betrachten Sie das He-Atom bzw. ein $(Z - 2)$ -fach ionisiertes Atom:

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|},$$

und fassen Sie die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen als kleine Störung auf! Approximieren Sie die Grundzustandsenergie mit Hilfe zeitunabhängiger Störungstheorie erster Ordnung und vergleichen Sie mit dem Resultat des Ritzschen Variationsverfahrens (s. Vorlesung)!

Aufgabe 31 — Zeitabhängige Störungstheorie

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System mit Hamilton-Operator $H_t = H_0 + V_t$. Die Eigenenergien des ungestörten Terms H_0 seien entartet. Der Störterm V_t sei explizit

zeitabhängig. In einer speziellen Darstellung gelte:

$$H_0 = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}, \quad V_t = \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix} \cdot \Theta(t)$$

mit reellem V und der Stufenfunktion $\Theta(t)$.

Zur Zeit $t = 0^-$ befinde sich das System im Zustand $|\Psi\rangle = (1, 0)^\dagger$. Berechnen Sie die exakte Lösung $|\Psi(t)\rangle$ der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für beliebige Zeiten t ! Diskutieren Sie dazu die Unstetigkeit von H_t bei $t = 0$! Wie verhält sich die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$? Berechnen Sie die zeitabhängige Übergangswahrscheinlichkeit von einem ungestörtem Zustand in den anderen. Vergleichen Sie mit dem Resultat der zeitabhängigen Störungstheorie!