

Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 52 — Kurvenintegral

a) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \\ \alpha x_3 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\text{rot } \vec{F} = 0$?

b) Berechnen Sie

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{s} \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{C}'} \vec{F} d\vec{s}!$$

\mathcal{C} sei hier die gerade Strecke von $(0, 0, 0)^T$ nach $(1, 1, 1)^T$. \mathcal{C}' sei der durch $t \mapsto (t, t^2, t)^T$ parametrisierte Weg zwischen den gleichen Punkten $(0, 0, 0)^T$ und $(1, 1, 1)^T$.

c) Diskutieren Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 53 — Wegunabhängigkeit

Es sei $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, dessen Kurvenintegral zwischen zwei beliebigen Punkten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 im \mathbb{R}^3 stets unabhängig vom Weg (zwischen \vec{x}_1 und \vec{x}_2) ist.

Zeigen Sie, dass daraus sofort

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{s} = 0$$

für jeden geschlossenen Weg \mathcal{C} folgt!

Aufgabe 54 — Flächeninhalt

Zeigen Sie mit Hilfe des Greenschen Satzes, dass der Flächeninhalt eines ebenen Bereichs D als

$$\iint_D dA = - \oint_{\partial D} x_2 dx_1$$

geschrieben werden kann!

Aufgabe 55 — Gauß'scher Satz

Berechnen Sie den Fluss

$$\oint_S \vec{F} \, d\vec{A}$$

des Vektorfelds

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche S eines Zylinders mit Radius R und Höhe H !

- a) Führen Sie die Rechnung direkt nach der Definition für Oberflächenintegrale durch!
- b) Verwenden Sie den Gaußschen Satz zur Berechnung des Flusses und vergleichen Sie!