Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 45 — Totales Differential
a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{z}$$

das totale Differenzial df!

b) Gegeben ist das folgende totale Differenzial

$$df = y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy$$

Wie lautet die zugehörige Funktion $f(x, y)$?

c) Gegeben sei das totale Differenzial einer Funktion $f(x, y)$:

$$df = g_1(x, y)\,dx + g_2(x, y)\,dy\ .$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial y} g_1(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y)\ !$$

Aufgabe 46 — Stationäre Punkte
Bestimmen Sie für die Funktionen

a) $f(x, y) = e^{xy}$ b) $f(x, y) = xe^{xy}$ c) $f(x, y, z) = x^3y + y^2 + xz$

jeweils sämtliche stationären Punkte und geben Sie an, ob es sich um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt!

Aufgabe 47 — Alternative Charakterisierung von Eigenvektoren
Gegeben sei eine symmetrische $n \times n$-Matrix A. Welche Beziehung besteht zwischen den Eigenvektoren von A und den stationären Punkten von

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}\ ?$$

Aufgabe 48 — Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung
Bestimmen Sie die Punkte der Ellipse $x^2 + xy + y^2 = 4$ mit dem größten bzw. kleinstem Abstand zum Ursprung $(0, 0)$!

Aufgabe 49 — Hesse- und Jacobi-Matrix
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei ein skalares Feld. Welche Beziehung besteht zwischen der Hesse-Matrix von f und der Jacobi-Matix von grad$f$?

Aufgabe 50 — Jacobi-Matrix, Kugelkoordinaten
Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix und deren Determinante für die Transformation zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \ , \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \ , \\ z &= r \cos\vartheta \ ! \end{aligned}$$

Aufgabe 51 — Nabla-Operator
Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z/y + 1 \\ -xz/y^2 \\ x/y \end{pmatrix} \ .$$

Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\vec{F}$! Ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld?
$\vec{v}, \vec{w}$ seien Vektorfelder. Berechnen Sie:

$$\text{rot rot } \vec{v}(\vec{x}) \ , \qquad \text{rot } (\ \vec{v}(\vec{x}) \times \vec{w}(\vec{x})\ ) \ , \qquad \text{div } (\ \vec{v}(\vec{x}) \ \times \text{rot } \vec{v}(\vec{x})\ ) \ !$$