Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 40 — Rand einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

Betrachten Sie die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{Q}^n = \{\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i \text{ rational } \forall i = 1, ..., n\}$$

Es sei $\vec{q} \in \mathbb{Q}^n$. Ist $\vec{q} \in \partial\mathbb{Q}^n$?
Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ist $\vec{x} \in \partial\mathbb{Q}^n$?
Ist $\mathbb{Q}^n$ offen?
Ist $\mathbb{Q}^n$ abgeschlossen?

Aufgabe 41 — Gradient

Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_2\sqrt{1 - x_1^2}$$

mit $-1 < x_1 < 1$ und $x_2 \in R$.

a) Berechnen Sie das zugehörige Gradientenfeld!

b) Berechnen Sie die Steigung von f im Punkt $\vec{x}_0 = (1/\sqrt{2}, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ entlang der Richtungen $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$, $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$ und $\vec{v}_3 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$!

c) In welcher Richtung ist die Steigung im Punkt $\vec{x}_0 = (1/\sqrt{2}, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ am größten? Welchen Wert besitzt die Richtungsableitung in dieser Richtung?

d) Geben Sie die Tangentialebene an die durch f beschriebene Fläche im $\mathbb{R}^3$ im Punkt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))^T \in \mathbb{R}^3$ an!

e) Skizzieren Sie einen Satz von Höhenlinien und das Gradientenfeld der Funktion f!

Aufgabe 42 — Laplace- und Wellengleichung

Zeigen Sie, dass

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

die sogenannte Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

(für $x, y, z \neq 0$) erfüllt!

Zeigen Sie, dass

$$\varphi(x,t) = f(x + ct)$$

($c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebig, f zweimal stetig differenzierbar) die sogenannte Wellen-Gleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

erfüllt!

Aufgabe 43 — Taylor-Formel

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

in Potenzen von x und y um den Punkt $(0,0)$ unter Ausnutzung der Taylor-Formel bis zur Ordnung $k = 2$ (einschließlich)!

Aufgabe 44 — Gradient, Hesse-Matrix, Taylor-Entwicklung

A sei eine reelle und symmetrische $n \times n$-Matrix.

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}\,!$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung in der durch $\vec{v}$ (mit $|\vec{v}| = 1$) gegebenen Richtung!

c) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H(0)$ im Punkt $\vec{x}_0 = 0$!

d) Was folgt für die Taylor-Entwicklung von f um $\vec{x}_0 = 0$?

e) Wie sieht die Taylor-Entwicklung von f um einen beliebigen Punkt $\vec{x}_0 \neq 0$ aus?