Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 19 — Multiplikation und Rang von Matrizen

Berechnen Sie:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) Finden Sie zwei Matrizen A und B, so dass $AB \neq BA$!

e) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Wenn $AB = 0$, dann $A = 0$ oder $B = 0$.

f) Bestimmen Sie den Rang von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}!$$

Aufgabe 20 — Matrixinversion – 1

Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

für beliebige $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ bzw. $a, b, c, d \in \mathbb{K}$!

Aufgabe 21 — Matrixinversion – 2
Zeigen Sie für invertierbare und komplexe $n \times n$-Matrizen A und B, dass:

$$(A^{-1})^{-1} = A\,, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T\,, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*\,!$$

Aufgabe 22 — Matrixdarstellung und Basiswechsel
V sei ein Vektorraum mit dim$V = 2$ und $B_V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine Basis. Weiter sei $F : V \to V$ linear und es gelte:

$$\begin{aligned} F(\vec{v}_1) &= 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ F(\vec{v}_2) &= -2\vec{v}_2\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die zu F bezüglich B_V gehörige Matrix A!

$B'_V = \{\vec{v}'_1, \vec{v}'_2\}$ sei eine weitere Basis. Die "alten" Basisvektoren lassen sich nach den "neuen" entwickeln und es gelte:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2 \\ \vec{v}_2 &= -\vec{v}'_1 + \vec{v}'_2\,. \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie $F(\vec{v}'_1)$ und $F(\vec{v}'_2)$ und entwickeln Sie die Ergebnisse in den "neuen" Basisvektoren $\vec{v}'_1$ und $\vec{v}'_2$!

c) Bestimmen Sie damit die zu F bezüglich B'_V gehörige Matrix A'!

d) Berechnen Sie die Transformationsmatrix T und ihre inverse T^{-1}!

e) Berechnen Sie jetzt A' noch einmal, aber mit der allgemeinen Transformationsformel $A' = TAT^{-1}$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von c)!

Aufgabe 23 — Gruppen $GL(n, \mathbb{K})$, $O(n)$, $U(n)$
Es seien

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{K}) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) \mid A \text{ invertierbar}\} \\ O(n) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal}\} \\ U(n) &= \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ unitär}\} \end{aligned}$$

die Menge der invertierbaren, der orthogonalen bzw. der unitären $n \times n$-Matrizen.

Zeigen Sie, dass $GL(n, \mathbb{K})$, $O(n)$ und $U(n)$ jeweils mit der Matrixmultiplikation Gruppen bilden!