Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 13 — Orthogonalbasis

Gegeben seien vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, dass die $\vec{b}_i$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden!

b) Entwickeln Sie

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

in der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$, d.h. geben Sie die entsprechenden Komponenten an!

c) Benutzen Sie das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren, um aus der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ eine Orthonormalbasis $\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\}$ zu konstruieren!

d) Wie lauten die Komponenten von $\vec{x}$ in der Orthonormalbasis?

Aufgabe 14 — Länge, Winkel, Abstand

V sei der euklidische Vektorraum der auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetigen, reellwertigen Funktionen: $V = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Das Skalarprodukt für $f, g \in V$ ist definiert durch:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} dx\, f(x)\, g(x) \quad .$$

Berechnen Sie für $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$:

a) $\|f\|$,

b) $\|g\|$,

c) den zwischen f und g eingeschlossenen Winkel φ,

d) den Abstand zwischen f und g!

Aufgabe 15 — Levi-Civita-Tensor
Beweisen Sie

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}\ !$$

Berechnen Sie

$$\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{mjk} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk}\ !$$

Aufgabe 16 — Kreuzprodukt
Benutzen Sie den Levi-Civita-Tensor, um zu zeigen, dass

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad !$$

Aufgabe 17 — Lineare Abbildungen und lineare Abhängigkeit
Es seien V und W Vektorräume, $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n \in V$ und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear abhängig, dann sind auch $F(\vec{a}_1), ..., F(\vec{a}_n)$ linear abhängig!

b) Sind $F(\vec{a}_1), ..., F(\vec{a}_n)$ linear unabhängig, dann sind auch $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear unabhängig!

c) Sind $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear unabhängig, dann sind auch $F(\vec{a}_1), ..., F(\vec{a}_n)$ linear unabhängig!

Aufgabe 18 — Dimensionsformel
Es seien V und W Vektorräume und $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.
Zeigen Sie, dass

$$\dim \mathrm{Kern}\, F + \dim \mathrm{Bild}\, F = \dim V \quad !$$

Anleitung: Man wähle eine Basis von Kern F, $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k\}$, und eine Basis von Bild F, $\{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_l\}$, und zeige, dass $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k, \vec{b}_1, ..., \vec{b}_l\}$ eine Basis von V ist, wobei $F(\vec{b}_i) = \vec{x}_i$ für $i = 1, ..., l$.