Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 6 — Untervektorräume
Welches geometrische Objekt beschreibt die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = d\}$$

für gegebenes $d \in \mathbb{R}$? Untersuchen Sie, unter welchen Umständen U einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ darstellt!

Aufgabe 7 — Vereinigung von Untervektorräumen
Es seien V ein Vektorraum, und U_1 und U_2 Untervektorräume von V.
Ist $U_1 \cup U_2$ dann ebenfalls ein Untervektorraum von V? Falls ja, beweisen Sie dies! Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an!

Aufgabe 8 — Lineare Abhängigkeit
Sei V ein Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear unabhängig, dann sind auch die Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n-1}$ linear unabhängig.

b) Sind die Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear abhängig und ist $\vec{a}_{n+1} \in V$ ein beliebiger weiterer Vektor, dann sind auch die Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_{n+1}$ linear abhängig.

c) Ist $\vec{a}_i = 0$ für ein i, dann sind die Vektoren $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$ linear abhängig.

d) $\vec{a}$ ist genau dann linear unabhängig, falls $\vec{a} \neq 0$.

Aufgabe 9 — Polynome
Gegeben sei die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten und Grad kleiner oder gleich $n \in \mathbb{N}$:

$$V = \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \mid c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}\} .$$

a) Wie kann man sinnvoll eine Addition $(+)$ zweier Polynome aus V definieren?
b) Wie kann man eine skalare Multiplikation $(\cdot)$ eines Polynoms aus V mit einer reellen Zahl definieren?
c) Zeigen Sie, dass $(V, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum ist!
d) Konstruieren Sie eine Basis! Welche Dimension hat V?

Aufgabe 10 — Unendlichdimensionaler Vektorraum
Betrachten Sie den Vektorraum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} .$$

Zeigen Sie, dass V unendlichdimensional ist!

Aufgabe 11 — Skalarprodukt
Betrachten Sie den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Für $i = 1, ..., n$ und $j = 1, ..., n$ seien komplexe Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ gegeben mit der Eigenschaft

$$a_{ij} = a^*_{ji} .$$

Für Spaltenvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus $\mathbb{C}^n$ mit Komponenten x_i bzw. y_i werde definiert:

$$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x^*_i \, a_{ij} \, y_j .$$

Untersuchen Sie, ob dadurch ein Skalarprodukt gegeben ist!
Für welche a_{ij} ergibt sich das kanonische Skalarprodukt?

Aufgabe 12 — Polarisierung
Berechnen Sie

$$\frac{1}{4} \left(||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2 \right)$$

für einen euklidischen Vektorraum!

Berechnen Sie

$$\frac{1}{4} \left(||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2 + i||\vec{a} - i\vec{b}||^2 - i||\vec{a} + i\vec{b}||^2 \right)$$

für einen unitären Vektorraum!