Übungen zur Mathematik für Ingenieure II

Aufgabe 1 — Abbildungen
Gegeben seien folgende Vorschriften:

a) $x \mapsto \sin(x)$,
b) $x \mapsto e^x$,
c) $x \mapsto x - 1$ für $x \geq 0$ und $x \mapsto x + 1$ für $x \leq 0$,
d) $x \mapsto \tan(x)$.
e) $x \mapsto 1/\sqrt{x}$.

Prüfen Sie jeweils, ob dadurch eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert ist und, falls nicht, ob eine Abbildung durch geeignete Einschränkung des Definitionsbereichs definiert werden kann!
Untersuchen Sie gegebenenfalls die jeweilige Abbildung auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität!

Aufgabe 2 — Lineare Abbildungen
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst “linear”, falls

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \, .$$

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf Linearität:
a) $f(x) = 3x^2 + 1$
b) $f(x) = i\,x$
c) $f(x) = 3i \,\mathrm{Re}\, x + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\, x$
d) $f(x) = x + 1$
e) $f(x) = x^* \qquad (x^* = \mathrm{Re}\, x - i\,\mathrm{Im}\, x)$

Zeigen Sie, dass $f + g$ linear ist, falls f linear ist und g linear ist! Die Summe zweier Abbildungen ist dabei durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ definiert.
Zeigen Sie, dass $f(0) = 0$ für jede lineare Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$!
Sind lineare Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stets bijektiv?

Aufgabe 3 — Gruppe der linearen Abbildungen
Zeigen Sie, dass die Menge der linearen Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Addition als Verknüpfung eine abelsche Gruppe bildet!

Aufgabe 4 — Affin lineare Abbildungen
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst “linear”, falls es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) = \lambda x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und “affin linear”, falls $\exists\, \lambda, c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \lambda x + c \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Konstruieren Sie eine affin lineare Funktion f, so dass $f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) = g'(x_0)$!

a) $g(x) = 1/(x-2)^2 \quad (x \neq 2) \qquad x_0 = 1$,
b) $g(x) = \sin(x) \qquad x_0 = \pi$,
c) $g(x) = e^{\tan(x)} \qquad x_0 = 0$.

Welche anschauliche Bedeutung hat jeweils die Funktion f?

Aufgabe 5 — Körper
Gegeben sei die Menge $F_2 = \{0, 1\}$. Zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sind durch

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & \qquad 0\cdot 0=0 \\ 0+1=1 & \qquad 0\cdot 1=0 \\ 1+0=1 & \qquad 1\cdot 0=0 \\ 1+1=0 & \qquad 1\cdot 1=1 \end{array}$$

definiert.
Zeigen Sie, dass $(F_2, +, \cdot)$ einen Körper bildet! Gibt es einen “kleineren” Körper?