Übungen zur

Quantenmechanik

– Blatt 7 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein

zum 11.06.2011

Aufgabe 1) Paritätseigenschaften (3 Punkte)
Finden Sie den Zusammenhang zwischen Energiniveaus des diskreten Spektrums und normierte Wellenfunktionen stationärer Zustände in den Potentialen $U(x)$ und $\tilde{U}(x)$, die miteinander auf folgende Weise verbunden sind: $\tilde{U}(x) = U(x)$ für $x > 0$ und $\tilde{U}(x) = \infty$ für $x < 0$, dabei sei das Potenzial $U(x)$ symmetrisch.

Aufgabe 2) Unendlich hoher Potenzialtopf mit δ-Peak (4 Punkte)
Finden Sie das Energiespektrum im Potential $U(x) = \alpha\delta(x)$ für $|x| < a$, $\alpha > 0$ und $U(x) = \infty$ für $|x| > a$. Untersuchen Sie die Eigenschaften der niedrigen Zustände im Limis $m\alpha a/\hbar^2 \gg 1$. Wie sieht das Spektrum der stark angeregten Zustände aus?

Aufgabe 3) Hermite-Polynome (3 Punkte)
Hermite-Polynome $H_n(z)$, $z \in \mathbb{R}$ sind durch die Rodriguez-Formel definiert

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \tag{1}$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (1) dass gilt

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z) \tag{2}$$

b) Zeigen Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}$$

mit Hilfe der erzeugenden Funktion $w(z,t) = e^{2zt-t^2}$ (siehe Gleichung (2)).
Hinweis: Betrachten Sie dazu das Integral $\int_{\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} w(z,t) w(z,s)$!