Übungen zur

Quantenmechanik

– Blatt 5 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein

zum 28.05.2013

Aufgabe 1) Translationsoperator (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass wenn $|x\rangle$ Eigenzustand zu $\hat{x}$ mit Eigenwert x ist, so ist auch

$$|\psi\rangle = e^{i\frac{\hat{p}a}{\hbar}}\,|x\rangle$$

Eigenzustand zu $\hat{x}$.

Aufgabe 2) Zweiniveausystem (4 Punkte)

Ein Teilchen habe die Möglichkeit, zwei orthonormale Zustände $|R\rangle$ und $|L\rangle$ mit den Energien V_R und V_L zu besetzen und mit einer reellen Wahrscheinlichkeitsamplitude W zwischen ihnen zu tunneln. Dieses System wird vom Hamiltonoperator

$$H = V_R\,|R\rangle\langle R| + V_L\,|L\rangle\langle L| + W(|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|) \tag{1}$$

beschrieben.

a) Geben Sie H als 2×2-Matrix sowie einen beliebigen Zustand $|\psi(t)\rangle$ in der Basis der Zustände $|R\rangle$ und $|L\rangle$ an. Lösen Sie die Eigenwertgleichung für H.

b) Zeigen Sie, dass für $V_R = V_L = V$ die zeitabhängige Schrödingergleichung in dieser Darstellung auf die gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,[c_1(t) + c_2(t)] \;=\; (V+W)\,[c_1(t) + c_2(t)] \tag{2}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,[c_1(t) - c_2(t)] \;=\; (V-W)\,[c_1(t) - c_2(t)] \tag{3}$$

führt, wobei $c_j(t) = \langle j\,|\psi(t)\rangle$ ist.

c) Lösen Sie das Differentialgleichungssystem aus **b)** mit der Anfangsbedingung, dass sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|R\rangle$ befindet.

d) Diskutieren Sie die Zeitabhgigkeit der Wahrscheinlichkeiten $|c_1(t)|^2|$, $|c_2(t)|^2$ und $|c_1(t) + c_2(t)|^2$ und ihre physikalische Bedeutung anhand einer Skizze.

Aufgabe 3) δ-Potenzial (3 Punkte)

Bestimmen Sie die normierte Wellenfunktionen und den Energieeigenwert des gebundenen Zustandes in das δ-Potenzial $U(x) = -\alpha\delta(x)$ in einer Dimension.

*H*inweis: um die Grenzbedienung für die Ableitungen der Wellenfunktion im Punkt $x = 0$ zu finden, integrieren Sie die Schrödinger Gleichung über eine kleine Umgebung des Null-Punktes.