

Übungen zur Quantenmechanik

– Blatt 4 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein
zum 14.05.2013

Aufgabe 1) Nützliche Eigenschaft hermitescher Matrizen (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine beliebige hermitesche Matrix $\hat{A}$ gilt

$$\det \|\exp \hat{A}\| = \exp (\operatorname{Sp} \hat{A}).$$

Aufgabe 2) Projektionsoperator (3 Punkte)

Ein Projektionsoperator $\hat{P}$ ist definiert als ein hermitescher Operator mit der Eigenschaft $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

- a) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{P}(f_i)$ dessen Wirkung auf Eigenfunktionen des hermiteschen Operators $\hat{f}$ wie folgt definiert ist:

$$\hat{P}(f_i)\Psi_{f_k} = \delta_{f_i, f_k} \Psi_{f_k} = \begin{cases} \Psi_{f_i}, & f_i = f_k, \\ 0, & f_i \neq f_k. \end{cases},$$

ein Projektionsoperator ist (f_k sind die Eigenwerte von $\hat{f}$). Wegen der Vollständigkeit von $\{\Psi_{f_i}\}$, definieren die obengenannten Relationen die Wirkung des Operators $\hat{P}(f_i)$ auf eine beliebige Wellenfunktion Ψ .

- b) Auf welche Zustände projiziert dieser Operator? Was ist die physikalische Bedeutung des Erwartungswertes $\langle \hat{P}(f_i) \rangle$ in einem Zustand, der mit der Wellenfunktion Ψ beschrieben wird.
- c) Stellen Sie den Operator $\hat{P}(\{f\})$, der auf die Zustände projiziert, in denen f einen Wert aus der Menge $\{f\} = \{f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_N}\}$ annimmt, durch die Operatoren $\hat{P}(f_{i_\alpha})$ ($\alpha = 1, \dots, N$) dar. Überprüfen Sie, dass $\hat{P}(\{f\})^2 = \hat{P}(\{f\})$ gilt.

Aufgabe 3) Orts- und Impulsdarstellung. (4 Punkte)

- a) Berechnen Sie jeweils die Orts- und Impulsdarstellung des Orts- und Impulsoperators.
- b) Geben Sie jeweils die Eigenzustände von Orts- und Impulsoperator in Orts- und Impulsdarstellung an.
- c) Im eindimensionalen Fall finden Sie die Darstellung des Operators $\widehat{1/p}$ in Ortsdarstellung und des Operators $\widehat{1/x}$ in Impulsdarstellung.