Übungen zur

Quantenmechanik

– Blatt 3 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein

zum 07.05.2013

Aufgabe 1) Operatoren, Hilberträume (3 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte hermitescher Operatoren reell sind.

b) Zeigen Sie, dass Erwartungswerte von hermiteschen Operatoren reell sind.

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Schwartzfschen Ungleichung, dass die Dreiecks.Ungleichung $||a+b|| \leq ||a|| + ||b||$ für zwei Vektoren a und b eines Hilbertraums, erfüllt ist.

Aufgabe 2) Entartete Eigenzustände (4 Punkte)

Gegeben seien hermitesche Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{L}$ mit Kommutationsrelationen $[\hat{A}, \hat{L}] = [\hat{B}, \hat{L}] = 0$ und $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Zeigen Sie, dass unter den Eigenwerten des Operators $\hat{L}$ es unbedingt entartete gibt.

Aufgabe 3) Satz von Hellmann-Feymann (3 Punkte)

Es sei $\hat{F}(\lambda)$ ein hermitesche Operator, der von einen reelen Parameter λ abhängt;

$f_n(\lambda)$ und $\Psi_n(q,\lambda)$ seien seine Eigenwerte und Eigenfunktionen (q ist die verallgemeinerte koordinate):

$$\hat{F}(\lambda)\Psi_n(q,\lambda) = f_n(\lambda)\Psi_n(q,\lambda).$$

Zeigen Sie, dass

$$\partial f_n(\lambda)/\partial\lambda = \langle \Psi_n(q,\lambda)|\, \partial\hat{F}(\lambda)/\partial\lambda \,|\Psi_n(q,\lambda)\rangle$$