

Übungen zur
Quantenmechanik
– Blatt 2 –
Prof. Dr. Alexander Lichtenstein
zum 30.4.2013

Aufgabe 1) Integrale (2 Punkte)

a) Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-a(x-u)^2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-b(u-y)^2} = \sqrt{\frac{ab}{\pi(a+b)}} \exp\left(-\frac{ab}{a+b}(x-y)^2\right)$$

b/c) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-ay^2+by} \quad f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ia y}$$

d) Sei A eine reelle symmetrische $N \times N$ Matrix, η ein N -dimensionaler Vektor. Zeigen Sie

$$\int d^N \eta e^{-\eta^T A \eta} = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det A}}$$

Aufgabe 2) Gaußsches Wellenpaket (3 Punkte)

Im potentialfreien Raum ($V(x) \equiv 0$) habe ein eindimensionales Wellenpaket zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$\psi(x, 0) = C \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2} + \frac{i}{\hbar} p_0 x\right],$$

wobei x_0, p_0 und $a > 0$ vorgegebene Konstanten sind.

- a) Bestimmen Sie die Konstante C so, dass die Wellenfunktion $\psi(x, 0)$ auf 1 normiert ist.
- b) Berechnen Sie $\psi(x, t)$ für $t > 0$.
- c) Bestimmen Sie $\langle x \rangle$ und Ortsunschärfe Δx als Funktion der Zeit t . Skizzieren Sie die Dichteverteilungen zur Zeit $t = 0$ und für einen Zeitpunkt $t > 0$.
- d) Bestimmen Sie den Erwartungswert des Impulses des Wellenpakets, sowie die Impulsunschärfe.
- e) Diskutieren Sie den Erwartungswert der Geschwindigkeit im Vergleich mit den Phasengeschwindigkeiten im Gaußschen Wellenpaket.

Aufgabe 3) Vollständige Orthonormalsysteme (2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Funktionensysteme

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(ix \frac{2\pi n}{a}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

auf dem endlichen Intervall $[0, a]$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Raum der quadratintegrablen Funktionen $L_2(0, a)$ bilden. (Hinweis: Um die Vollständigkeit zu beweisen, zeigen Sie, dass folgende Relation gilt: $\sum_n \phi_n^*(x) \phi_n(x') = \delta(x - x')$)

b) Um zu zeigen dass auch das Funktionensystem

$$\begin{aligned}\chi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}}, \\ \chi_n^+(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(2\pi \frac{x}{a} n\right), \\ \chi_n^-(x) &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(2\pi \frac{x}{a} n\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

ein vollständiges Orthonormalsystem auf $L_2(0, a)$ ist, zeigen sie dass der Vektor $\chi = (\chi_0, \chi_1^+, \chi_1^-, \dots)$, durch eine unitäre Transformation U aus $\phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_{-1}, \dots)$, erhalten werden kann, das heisst dass $\chi = U\phi$ gilt mit $U^+ = U^{-1}$.

Aufgabe 4) Operatorfunktionen (3 Punkte)

Eine *Operatorfunktion* $f(A)$ ist durch die Reihe

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

definiert. Die Koeffizienten $f^{(n)}(0)$ sind dieselben, die man bei der Entwicklung einer korrespondierenden Funktion $f(z)$ erhielte, die von einer Variable z abhängt.

a) Zeigen Sie, dass $[A, f(A)] = 0$ für jede Operatorfunktion $f(A)$ gilt.

b) Beweisen Sie für zwei nicht vertauschbare Operatoren A und B :

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!} [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

Tipp: Entwickeln Sie $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$ in eine Taylorreihe um die Stelle $\lambda = 0$:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^n f(\lambda)}{d\lambda^n} \right]_{\lambda=0} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Betrachten Sie dieses Ergebnis dann für $\lambda = 1$.

c) Zeigen Sie die Baker-Hausdorff-Formel für lineare Operatoren A und B mit $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für $f(t) = e^{At} e^{Bt}$ (t reell) die Differentialgleichung

$$\frac{df}{dt} = (A + B + t[A, B]) f(t)$$

gilt und lösen Sie diese.