

Übungen zur Quantenmechanik

– Blatt 10 –

Prof. Dr. Alexander Lichtenstein
an 02.07.2013 - Probeklausur

Aufgabe 1) Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit der Ladung q in einem eindimensionalen parabolischen Potential unter dem Einfluss eines homogenen elektrischen Feldes E

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 + qEx$$

Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung.

Aufgabe 2) Drehimpuls (4 Punkte)

a) Beweisen Sie die Kommutationsrelationen des Bahndrehimpulsoperators

$$[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i, x_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k, \quad [L_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k \quad (1)$$

mit dem *total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe*

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen von (123)} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen von (123)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Achtung! In Gleichung (1) gilt Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert!

b) Beweisen Sie, dass der Drehimpuls $\mathbf{L}$ die Erzeugende von Drehungen ist. Zeigen Sie dafür,

(i) der Operator

$$U_{\delta\varphi} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \delta\varphi \cdot \mathbf{L}\right)$$

ist unitär und

(ii) $U_{\delta\varphi}$ erzeugt für kleine $\delta\varphi$ infinitesimale Rotationen: $U_{\delta\varphi} \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}')$ mit $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\varphi \times \mathbf{r}$ und beliebiger Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$.

Aufgabe 3) Rotator (3 Punkte)

Finden Sie die Eigenfunktionen der stationären Zustände und die entsprechende Eigenenergien des ebenen Rotators mit Trägheitsmoment I . Wie sind die Energieniveaus entartet?

Im Zustand des Rotators, gegeben durch die Wellenfunktion $\Psi = C \cos^2 \theta$, finden Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von verschiedenen Energie-, Drehimpuls- und z -Drehimpulskomponentenwerte. Finden Sie die Erwartungswerte und Fluktuationen dieser Größen.

Hinweis: Hamiltonian des ebenen Rotators ist $\hat{H} = \hbar^2 l_z^2 / 2I$.